

Eladio Dieste

1943-1996

MÉTODOS DE CÁLCULO • CALCULATION METHODS



Eladio Dieste

Eladio Dieste
1943-1996

MÉTODOS DE CÁLCULO • CALCULATION METHODS

MÉTODOS DE CÁLCULO • CALCULATION METHODS

INDICE

Eladio Dieste

1943-1996

MÉTODOS DE CÁLCULO • CALCULATION METHODS

Eladio Dieste

MÉTODOS DE CÁLCULO - CALCULATION METHODS

Primera edición: 1996
Segunda edición: 1997
Tercera edición: 1998
Cuarta edición: 2001

© Junta de Andalucía, Consejería de
Obras Públicas y Transportes
ISBN (obra completa): 84-8095-136-2
ISBN (tomo II): 84-8095-138-9
N.º Registro: JAOP/AV-007-98

Í N D I C E

I N D E X

Torres caladas <i>Perforated Towers</i>	9 77
Pandeo de láminas de doble curvatura <i>Deflection in double curvature vaults</i>	15 83
Prólogo <i>Prologue</i>	17 85
La inestabilidad elástica <i>Elastic instability</i>	18 86
Fuerza axial coexistiendo con flexiones <i>Axial force concurrent with bending</i>	26 94
Compresión excéntrica de una columna esbelta <i>Eccentric compression of a slender column</i>	27 95
Carga axial de una columna esbelta coexistiendo con cargas en el plano de menor rigidez de la columna <i>Axial load on a slender column concurrent with loads on the least rigid plane of the column</i>	31 99
Resumen de lo obtenido <i>Summary of the results up until now</i>	35 103
Aplicación de la ecuación de la energía a los problemas de pandeo <i>Application of the energy equation to deflection problems</i>	36 104
El método de las aproximaciones sucesivas <i>Successive approximation method</i>	42 110
Observación general <i>General observation</i>	49 117
Carga crítica de arcos de directriz catenaria cargados con su propio peso <i>Critical loads of catenary directrix arches loaded with their own weight</i>	53 121
Condiciones de apoyo <i>Support conditions</i>	69 137
Coexistencia en arcos de fuerza directa con flexiones <i>Concurrency of axial loads and bending in arches</i>	69 137
Arcos o láminas que no son funicular de las cargas <i>Arches or vaults that are not funicular of the loads</i>	70 138
Observación final <i>Final observation</i>	71 139

Por vocación y porque es lo primario y más importante, nos hemos dedicado a idear las maneras en que puede usarse racionalmente el ladrillo y al diseño de los equipos (moldes, gatos de precomprimido, etc.) que volvieran viable lo pensado pero no hemos tenido tiempo ni ocasión de encarar todo el trabajo de sistematización que permita deducir, de los ensayos, las tensiones admisibles. Hemos hecho también en esto un gran esfuerzo que nos permite tener seguridad en lo que hacemos, pero este trabajo es aún insuficiente y se requiere todavía un gran trabajo de sistematización.

Es casi un axioma que las estructuras bien diseñadas son fáciles de calcular y sus tensiones son bajas pero suelen presentarse zonas o solicitaciones para las que habría que tener mejor información.

Las torres, por ejemplo, tienen tensiones pequeñas para las cargas fijas pero las pueden tener mayores por efecto de viento y, en ausencia de ese trabajo de normalización, hay que ser prudentes. Para un ladrillo de 220 K/cm² de carga de rotura, ensayada en cubos, admitimos para las cargas fijas 60 K/cm² y contando el efecto de viento hasta 90 K/cm².

Torres

caladas

Su cálculo es un ejemplo de lo que ha sido siempre nuestro criterio: ver sintéticamente el modo global de trabajo de cada estructura y diseñarla coherentemente con esa visión global.

En el caso de las torres el proceso puede resumirse así:

El cálculo del torsor de las fuerzas por encima de cualquier sección se hace determinando:

1. La componente vertical de la resultante que es el peso sobre la sección considerada.
2. La componente horizontal se deduce de las normas de viento. En ausencia de ensayos, consideramos superficie rugosa y llena, lo que es obviamente desfavorable. Como se trata de estructuras muy esbeltas hay que considerar, por lo menos en principio, la acción dinámica del viento, y, consiguientemente, las masas de la torre en el movimiento vibratorio generado por las ráfagas. Hemos contado períodos de ráfagas de 3 segundos, lo que es desfavorable. Las masas de la torre se tienen en cuenta por el método de Lord Raleigh (en el cálculo de la Energía Cinética para aplicar la ecuación de la energía igualando su variación a la correspondiente variación de la energía potencial de deformación de la torre¹). En todos los casos estudiados hasta ahora, no se deducen del estudio dinámico diferencias con lo que se tiene considerando la carga del viento como estática; el período propio de la estructura ha resultado mucho menor que el considerado para las ráfagas, no habiendo, por lo tanto, el menor riesgo de resonancia.
3. El momento flector es el debido a las fuerzas de viento por encima de la sección considerada.

Para determinar la dirección de N , resultante de las compresiones, y T , resultante de las tracciones, en una sección dada, calculo la componente vertical de cada una de ellas, en valor y posición, en esa sección y en otra sobre ella y próxima, digamos a 1 m, uniendo los puntos de aplicación tengo la dirección buscada. Para calcularlas admito que, para los efectos de viento, toda la sección es activa que es lo que sucede para efectos de corta duración. Considero la torre como un tubo homogéneo y continuo, de radio medio r igual al de la torre real, y de espesor e , tal que $2 \cdot \pi \cdot r \cdot e = \Omega$ donde Ω , es la sección real que estamos considerando. La determinación de las máximas tensiones de compresión y tracción es elemental. No da más trabajo considerar la sección con su forma real, pero las diferencias frente al método aproximado de considerar un tubo lleno, son pequeñas y este tiene la ventaja de permitir una exposición más fluida.

Siendo σ_T la máxima tensión de tracción el hierro que debemos poner en la «columna» en la sección considerada, será:

$$\frac{\sigma_T \cdot \omega}{Fe} \leq \sigma_e \cdot \text{adm. (lo que es ligeramente desfavorable ya que } \sigma_T \text{ medio} < \sigma_T \text{.)}$$

donde ω es la sección de la «columna».

¹ Ver Timoshenko («Vibration problems in Engineering»).

Para acero torsionado corriente con $\sigma_t = 4.200 \text{ K/cm}^2$, tomamos $\sigma_e \text{ adm.} = 3.000 \text{ K/cm}^2$.

Para dimensionar la estructura al cortante, la hacemos coherente con la hipótesis de que la torre funciona como un tubo. Sus huecos, cuya función durante la construcción ya se ha explicado, suponen, geométricamente, las «traviesas», entre «columnas». Estas «traviesas» son indispensables para la hipótesis de que la torre trabaja efectivamente como un tubo. A través de estas «traviesas» debe pasar el esfuerzo cortante Q que tiende a producir el desplazamiento del punto de una columna, en un extremo de la «traviesa», respecto al punto de la «columna» adyacente en el otro extremo de la «traviesa». El valor del cortante Q resulta de la dinámica de la Fig. 2 en que se ve claramente la razón estática de la forma troncocónica de la torre, a que alude la exposición general.

Cada sección de la torre trabaja a preso-flexión. En una sección llena la tensión principal de tracción a absorber, se calcula en cada punto componiendo la correspondiente compresión o tracción con el τ del cortante. En esta tan particular estructura, las compresiones o tracciones van por las columnas y **todo** el cortante debe pasar por las «traviesas» que no soportan esfuerzos de compresión o tracción. Esa tensión de corte debe pues ser la máxima; que puede calcularse, con gran aproximación (Figura 3), suponiendo la sección como un aro.

$$b \cdot \tau \text{ máx.} = 2 \cdot e \cdot \tau \text{ máx.} = \frac{Q \mu \text{ máx.}}{l \times \chi} \text{ en que } b = 2 \cdot e$$

es el ancho de la sección $\cdot \mu \text{ máx.} = 2 \cdot r^2 \cdot e \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 2 \cdot r^2 \cdot e = \frac{\Omega \cdot r}{\pi}$ por lo tanto

$$2 \cdot e \cdot \tau \text{ máx.} = \frac{2Q}{\pi r}$$

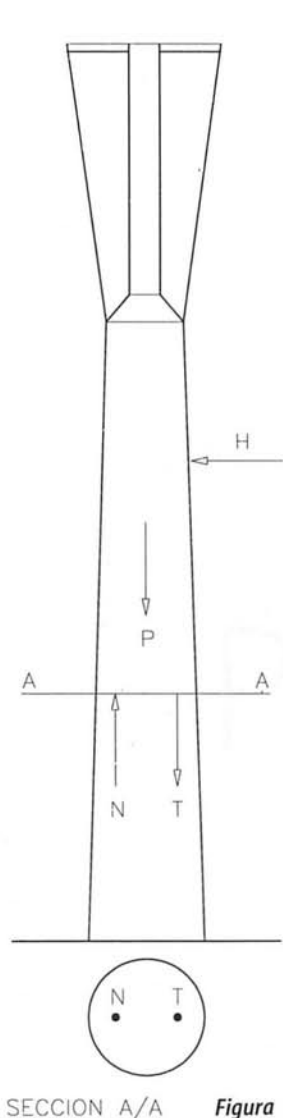
Si la separación entre «traviesas» es a , y, teniendo en cuenta que hay una «traviesa» a cada lado, cada una de las dos debe soportar una fuerza

$$R = \frac{1}{2} 2 \cdot e \cdot \tau \text{ máx.} \cdot a = \frac{Q \cdot a}{\pi r}$$

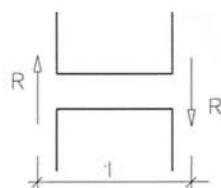
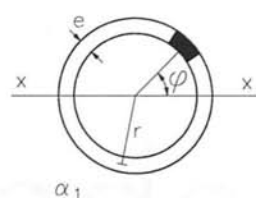
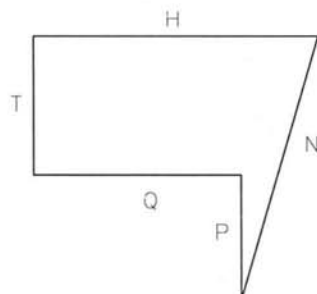
La «traviesa» (Fig. 4) debe soportar R al corte y la flexión $\frac{Rl}{2}$.

La práctica de cálculo muestra que es determinante la flexión. 1 es el vano entre columnas más el ancho necesario para que R «pase» por la columna.

Como se muestra en la parte correspondiente al cálculo de bóvedas autoportantes, las fuerzas internas provocadas por los esfuerzos rasantes deforman la lámina. Este concepto trasladado a las torres caladas produce torsión en las «columnas». Hemos analizado este efecto en las mayores torres construidas (antena de televisión). Los torsores son muy pequeños y no condicionan el dimensionado.



Dinámica de las Reacciones sobre la sección



Sólo resta agregar que el cálculo riguroso de estas torres sólo puede hacerse por computación; pero su predimensionado deberá hacerse siempre siguiendo los métodos aproximados que explicamos aquí, que son, por otra parte, los que siempre hemos usado sin ningún inconveniente.

En los tanques, el cálculo de la cúpula cónica del fondo de la cuba y de la armadura de las paredes de ésta, no se aparta de los métodos corrientes.

ólogo

Pandeo de láminas de doble curvatura

Prólogo

Si queremos, con una teoría científica, interpretar algún aspecto de la realidad, procuramos abstraer de esa realidad la esencia del fenómeno en estudio, poniéndonos deliberadamente en situaciones ideales que empobrecen su complejidad abrumadora para hacérsola más inteligible, y, a veces, cuantitativamente dominable.

Cuando Galileo formula la primera de las leyes de la dinámica, la ley de inercia, no dispone de ningún cuerpo que esté totalmente libre de la acción de otros cuerpos. Sus experiencias le muestran sin embargo, que cuanto más elimina las acciones de esos otros cuerpos sobre el que estudia, más se mantiene su «estado de reposo o de movimiento». Entonces da el salto intuitivo de imaginarlo en condiciones ideales, de ausencia de toda acción exterior sobre él, para establecer que en este caso «su estado de reposo o movimiento» (velocidad) se mantiene.

Esta ley no puede comprobarse con ninguna experiencia. Es, sin embargo, el primer eslabón de la cadena deductiva de la mecánica (y por tanto de la física) que verificará el «conjunto de sus consecuencias».

En el caso del pandeo, tal como ha sido expuesto en los libros que conozco, el caso ideal, el «modelo» objeto de una experiencia imaginaria, no aparece con claridad.

Decir «modelo», implica en este caso, definir la estructura con la que hacemos nuestra experiencia imaginaria y las sollicitaciones a que la sometemos. Hecha esa experiencia imaginaria y habiendo sacado de ella las correspondientes consecuencias, habremos aclarado nuestras ideas como para acercarnos más a los problemas reales.

Es por esto que empezamos por el problema ideal del pandeo sin flexión (aparte, desde luego, de la que se deriva del pandeo mismo) entrando luego al análisis de la coexistencia de flexiones con fuerza directa, primero en las columnas, después en los arcos.

Lo que sigue no es un tratado sobre el pandeo (se ha omitido deliberadamente todo lo que el estudiante puede encontrar en los textos corrientes), es más bien una reflexión sobre las dificultades esenciales del tema, provocada por el haber tenido que resolver los problemas de pandeo que se presentan en cubiertas de grandes luces.

Al estudiarlos por primera vez, no fue poca la sorpresa de encontrarme con un campo casi virgen¹; resolverlos supuso no sólo encontrar métodos prácticos de trabajo, sino sobretodo, precisar y aclarar mis propios conceptos.

La experiencia me mostró una vez más, que las dos etapas, la de resolución práctica de un problema y la de aclarar los fundamentos teóricos en que esa resolución se basa, mutuamente se ayudan y fertilizan.

Pienso que las páginas que siguen, pueden ser útiles a los estudiantes para formarse ideas claras sobre un tema que, me lo muestran muchos años de enseñanza, los desconcierta bastante.

¹ Un libro de 500 páginas como el *Theory of Elastic Stability* de Timoshenko dedica al pandeo de arcos apenas cinco páginas.

Están además incorporados al texto, no sólo claros métodos de trabajo, sino incluso tablas que permiten resolver rápidamente algunos problemas como, por ejemplo, la determinación de la carga crítica de un arco de directriz catenaria, funicular de cargas uniformes a lo largo de su desarrollo.

Este trabajo sólo ha sido posible con la ayuda invaluable del Centro de Computación de la Universidad de la República, en especial de su ex Director el ingeniero L. Osín y su actual Directora interina la ingeniera D. Alia de Saravia.

También debo destacar la colaboración del estudiante J. Masanés cuyo interés hizo que se materializara el pasaje, no siempre fácil, de la etapa en que todas las ideas esenciales están, a la etapa en que ese estar se precisa en material impreso.

LA INESTABILIDAD ELASTICA

Suponemos, en todo lo que sigue, que las estructuras analizadas trabajan en el período elástico, no sólo para las cargas que les están aplicadas sino cuando agregamos a éstas aquellas con que las apartamos de su posición de equilibrio. También asumimos que las cargas aplicadas (las que soporta la estructura y las agregadas para apartarla de su posición de equilibrio) lo son tan gradualmente como para que pueda excluirse la posibilidad de que el sistema pueda oscilar.

Consideramos un cuerpo que supondremos, según ya dijimos, perfectamente elástico, libre o vinculado, en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que le están aplicadas y de sus vínculos, por ejemplo, la viga de la Figura 1 con la carga P . Decimos, en este caso y en otros análogos, que el equilibrio es estable, cuando, apartando el cuerpo de su configuración de equilibrio, para lo que debemos modificar el sistema inicial de cargas o los vínculos, en el caso de la Figura 1 aplicando, por ejemplo, la nueva fuerza P' , y dejándolo luego en las condiciones de carga y vínculos iniciales, recobra el cuerpo su configuración geométrica inicial de equilibrio.

Hemos supuesto que la modificación del sistema inicial de cargas o de vínculos no produce deformaciones permanentes, lo que supone en general, en los casos concretos de la técnica, que los puntos del cuerpo elástico tengan desplazamientos cuyas dimensiones puedan despreciarse frente a las del cuerpo mismo. Como las estructuras se proyectan de modo que las tensiones estén, por lo menos en la imagen ideal que de estas estructuras nos hacemos, muy por debajo de las de fluencia de los materiales empleados, será siempre posible apartar el cuerpo de su posición de equilibrio sin crear deformaciones permanentes.

La Figura 1 muestra un caso de estabilidad elástica. Al eliminar la fuerza P' , la viga vuelve a su posición inicial. Si, al contrario, apartado el cuerpo de su posición de equilibrio y vuelto a sus condiciones iniciales de cargas y vínculos, no retoma su configuración geométrica inicial, decimos que el equilibrio era inestable. El clásico caso de inestabilidad elástica es el del pandeo.

Como ejemplo de estructura que puede pandear consideramos una columna esbelta AB (Figura 2), articulada sin frotamiento en A y B . Su eje, línea que une los c. de g. de las distintas secciones, se supone una recta, y,

por simplicidad, supondremos que esas secciones son constantes, geométrica y elásticamente. También que no tienen frotamiento las guías de la articulación A , que, suponemos, hacen que el movimiento de A sólo pueda ser según AB .

Sometamos la columna a la acción de una carga P , aplicada en A y colineal con AB . Si los supuestos indicados arriba se cumplieran, podríamos cargar la columna con una carga P tan grande como quisiéramos sin que la recta AB dejara de ser recta; las deformaciones, aún permanentes, se producirían según AB .

La columna de la Figura 2 será nuestro modelo ideal.

Supongamos ahora que apartamos la columna de su posición de equilibrio mediante la fuerza transversal P' y eliminamos luego la acción de P' . Si la columna no retoma su configuración geométrica inicial, el equilibrio era inestable; decimos que la columna pandea.

Sabemos que el pandeo sólo se producirá si la carga P supera un valor, P_{cr} , que llamamos carga crítica, y esto sucede sin que necesariamente hayan de producirse por el pandeo deformaciones permanentes; o sea que, del hecho de que P sea menor o igual, o mayor que P_{cr} , dependerá que la configuración inicial de equilibrio sea estable o inestable.

Como dijimos al principio, nuestra hipótesis de trabajo es que nos mantenemos en el período elástico; luego, cuando coexisten P y P' , la deformación máxima será δ' (Figura 2). Cuando eliminamos P' la deformación disminuirá pasando de δ' a δ siendo obviamente $\delta < \delta'$. La configuración del cuerpo elástico pandeado será de equilibrio estable según la definición dada más arriba. **La inestabilidad elástica se refiere a la configuración inicial de equilibrio;** la configuración misma de pandeo es de equilibrio estable.

Si hiciéramos realmente el experimento de cargar axialmente, con cargas crecientes, una columna esbelta con un esquema análogo al de la Figura 2, veríamos que, con cargas del orden de la carga crítica, la columna pandea. Para cargas poco superiores a la carga crítica las deformaciones son visibles, no despreciables frente a

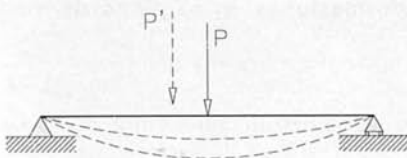
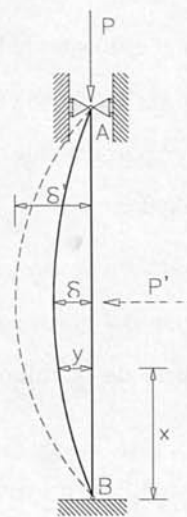


Figura 1



$z =$ descenso de A

Figura 2

la longitud de la barra, observándose, además, que, a cada valor de la carga, corresponde un valor de la deformación.

Sin la acción visible de ningún agente capaz de producir deformaciones transversales en la columna, con la sola acción, aparentemente, de la fuerza P , se ha producido el pandeo. Sabemos que lo que sucede es que no es realizable una coaxialidad perfecta entre P y el eje de la columna, no sólo por imprecisión en el centrado y dirección de la carga P , sino porque el eje de la columna no será nunca perfectamente rectilíneo, ni constante su sección ni geométrica ni elásticamente, y tampoco podremos aplicar la carga sin producir vibraciones o sea deformaciones laterales.

La idealización esquemática que hacemos siempre al estudiar una estructura, no crea, en otros casos, el de la flexión de la Figura 1, por ejemplo, diferencias sustanciales de comportamiento entre el esquema y la realidad. En la estructura que idealizamos con el esquema de la Figura 2, la diferencia entre lo que cabría esperar que sucediera y lo que efectivamente sucede, depende del valor de P .

Supongamos, en efecto, que se cumplan todas las hipótesis ideales, salvo, por ejemplo, la de que la única fuerza actuante sea P . Supongamos que con P coexisten pequeñas fuerzas P' , por ejemplo debidas al viento. La deformación de la columna sería imperceptible mientras $P < P_{cr}$. Para $P > P_{cr}$ las deformaciones aumentan rápidamente con P .

Suponiendo que P' haya deformado la columna y deje luego de actuar, veremos que, aún en el caso ideal, una carga 3,5% superior a la carga crítica es compatible con una deformación en la columna tal que el ángulo con la vertical de las tangentes a la elástica en las articulaciones es de 30 grados.

Para cualquier otro tipo de apartamiento, que suponemos pequeño, de las condiciones de nuestro modelo ideal, las deformaciones serán también pequeñas, salvo cuando $P > P_{cr}$, en que se producen deformaciones que pueden ser de un orden superior al usual en Resistencia de Materiales.

Consideremos pues el esquema de la Figura 2 y pongámonos en las condiciones ideales ya indicadas. Es corriente que la sección de la columna tenga por lo menos dos planos de simetría. Es un hecho de experiencia, cuyo fundamento teórico será muy claro a partir de la exposición que sigue, que el pandeo se produce en el plano de su menor rigidez.

Apartamos la columna de su posición de equilibrio, aplicándole, por ejemplo, en su plano de menor rigidez, una fuerza transversal que luego retiramos. **Investiguemos para qué valores de P existen configuraciones de equilibrio de la columna, coexistentes con deformaciones en su plano de menor rigidez.**

Veremos que para todo $P > P_{cr}$ existe una elástica bien definida, siendo P_{cr} un valor límite por debajo del cual las deformaciones desaparecen.

El problema planteado por Bernouilli a Euler («por su maestría en la resolución de ecuaciones diferencia-

les», le dice) fue resuelto por éste hace dos siglos². La primera aproximación a la solución correcta, que es la adelantada por Euler y la explicada en la mayoría de los textos, supone que las deformaciones son muy pequeñas, de modo que la curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

pueda escribirse en la forma aproximada $\frac{1}{\rho} = y''$, usual en la teoría de la flexión pura; o sea, con las convenciones de signo usuales:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}$$

y, por tanto,

$$y = C_1 \cdot \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x + C_2 \cdot \operatorname{cos} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x$$

Para $x = 0$, $y = 0$ por tanto $C_2 = 0$.

Para $x = \tau$ $y = 0$ por tanto $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = n \cdot \pi$,

por lo tanto la fuerza P , compatible con una configuración de equilibrio de la columna con deformación transversal a su eje, es:

$$P = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{\tau^2}$$

El mínimo valor de P , llamado carga crítica de Euler; es

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\tau^2}$$

Para este valor de P :

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{\tau}$$

por tanto la ecuación de la elástica será

$$y = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} \cdot x$$

arco de senoide que pasa por las articulaciones y tiene una flecha máxima δ (indeterminada) en su punto medio.

² Es interesante notar que el problema planteado por Bernouilli era un problema teórico, la determinación de las configuraciones de equilibrio de «un ruban elastique» sometido a una carga según su eje; problema que nada tenía que ver con ninguna exigencia técnica o práctica. En el siglo XVIII no se construían estructuras esbeltas. Es un buen ejemplo de la función, a mi juicio fundamental, del pensamiento matemático investigando la realidad: Adelantar-se mediante planteos y soluciones, necesariamente esquemáticos, a las necesidades de la ciencia o de la técnica.

La solución anterior no es satisfactoria. En efecto: la deflexión máxima δ resulta indeterminada; habría infinitas elásticas posibles para una misma carga P , lo que es conceptualmente absurdo (pensemos en la ecuación de la energía) y, desde luego, contrario a las experiencias más inmediatas y elementales.

Además la deformación de la columna es compatible sólo con cargas $P = Pc, 4Pc, 9Pc, \dots$, pero no con valores de P entre estas cargas, lo que nos llevaría a que la columna pandearía para una carga Pc pero no para una carga $>$ que Pc y $<$ que $4Pc$ lo que también es absurdo y contrario a la experiencia.

La razón de estos absurdos es que la expresión aproximada $1/\rho = y''$ no es aplicable en este caso. En efecto: esta aproximación supone que y' es despreciable frente a 1, lo que sólo se cumple para valores de P que difieran muy poco del borde inferior del intervalo, o sea de Pc , en que estudiamos el problema; luego la aproximación no es válida en todo el intervalo $P > Pc$, objeto de dicho estudio.

Retomemos entonces la expresión de la curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

Si despreciamos las deformaciones debidas al cortante, cosa siempre admisible en los casos corrientes de flexión y aún más en nuestro caso ya que los problemas de pandeo se plantean en columnas esbeltas y, además, los cortantes, proyecciones de P según la normal a la curva, son pequeños, sobre todo para los valores de P próximos a Pc , podemos escribir:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}$$

y por tanto

$$\frac{d\theta}{ds} \cdot d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\frac{P}{EI} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot d\theta = -\frac{P}{EI} \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta$$

por tanto

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{P}{EI} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

donde θ_0 es la pendiente en el origen.

Luego:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = -\sqrt{\frac{2P}{EI}} \cdot ds$$

por tanto (eligiendo de los signos posibles de $\frac{d\theta}{ds}$ el compatible con la forma de la elástica y recordando que

$$\cos \theta = 1 - 2 \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\cos \theta = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{2P}{EI}} ds = \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)}} \quad (1)$$

por tanto, ya que $\theta = 0$ para $s = \frac{\tau}{2}$:

$$-2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2} = \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (1')$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Sean:

$$\sin \cdot \frac{\theta_0}{2} = a, \quad \sin \frac{\theta}{2} = a \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

por tanto, para: $\theta = 0$, $\varphi = 0$; Para $\theta = \theta_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = a \cdot \cos \varphi \quad (3)$$

De (2):

$$\cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} d\theta = a \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

por tanto

$$d\theta = \frac{2 \cdot a \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4)$$

Luego:

$$\frac{P}{EI} \cdot \tau = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

El valor mínimo de la integral se tiene si $a = 0$; o sea si $\theta_0 = 0$; o, lo que es lo mismo, si no hay deformación. Luego, **para que haya deformación**, P debe ser mayor que el valor correspondiente al mínimo de la integral.

Si $a = 0$, la integral vale $\pi/2$, y el valor correspondiente da:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{\tau^2} = P \text{ crítica de Euler}$$

Para que la integral tenga un valor $> \pi/2$ (en otros términos **para que exista una configuración de equilibrio posible con la columna pandeada**), P debe ser mayor que:

$$\frac{\pi^2 EI}{\tau^2}$$

Luego para $P \leq P_{cr}$ la columna, apartada de su posición de equilibrio rectilíneo y abandonada a sí misma, retoma la configuración inicial, rectilínea, de equilibrio.

Para $P > P_{cr}$ existe una posición de equilibrio, unívocamente determinada por P , compatible con una configuración flexada, pandeada, de la columna.

Los valores de la integral elíptica del segundo miembro están tabuladas para diversos valores de a .

Para valores de P muy poco superiores a P_c , las deformaciones son muy grandes, de un orden superior a las admitidas en las teorías usuales en Resistencia de Materiales en las que suponemos invariable la «macrogeometría» de los sólidos estudiados. Por ejemplo, si $\theta_0 = 30$ grados³ la integral vale 1,598, por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = 2 \cdot 1,598 = 3,196 \quad \text{por lo tanto} \quad P = \left(\frac{3,196}{\pi}\right)^2 P_c = 1,0349 P_c$$

Luego basta una carga 3,5 % superior a la crítica, para tener deformaciones tan importantes de la columna, como para que la pendiente en las articulaciones sea de 30 grados.

Con una varilla esbelta de madera o de acero, cualquier estudiante puede hacer las experiencias, groseras pero ilustrativas, que lo convenzan de lo demostrado aquí: el orden importante de las deformaciones en cuanto se supera P_c : cómo esas deformaciones no suponen necesariamente deformaciones permanentes, la univocidad entre carga y deformación y el hecho de que el estado de la columna pandeada es de equilibrio estable.

Para calcular la fecha máxima, f , de la elástica, usamos la ecuación (1), multiplicando los dos miembros por $\text{sen } \theta$.

$$-2 \sqrt{\frac{P}{EI}} dy = \frac{\text{sen } \theta \cdot d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \tag{5}$$

$$\text{sen } \theta = 2 \text{sen} \cdot \frac{\theta}{2} \cdot \cos \cdot \frac{\theta}{2} = 2a \text{sen } \varphi \cdot \sqrt{1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi}$$

Teniendo en cuenta el signo de (5) y recordando (3) y (4):

$$2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot f = \int_0^{\pi/2} 2a \text{sen } \varphi \cdot \sqrt{1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi} \cdot \frac{2d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi}}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot f = \int_0^{\pi/2} 2a \text{sen } \varphi d\varphi = 2a$$

³ $a = \text{sen} \cdot \frac{30^\circ}{2}$.

Una tabla de integrales elípticas puede verse, por ejemplo, en el Hütte.

Para el ejemplo anterior en que $P = 1,0349P_c$

$$\theta_0 = 30^\circ \quad \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = 3,196 \quad ; \quad 2a = 2 \operatorname{sen} 15^\circ = 0,518$$

Por lo tanto:

$$f = \frac{2a}{\sqrt{\frac{P}{EI}}} = \frac{0,518}{3,196} \tau = 0,162\tau^4$$

lo que vuelve a poner de manifiesto la entidad de las deformaciones: para una carga 3,5% superior a P_c la flecha es el 16% de la longitud de la columna.

Resumamos los resultados anteriores:

Para el modelo ideal, que es nuestro punto de partida, se tiene:

1. Si $P \leq P_c$ la recta AB (Figura 2), es la configuración de equilibrio estable.
2. Si $P > P_c$, la configuración de eje rectilíneo es de equilibrio inestable, la configuración de equilibrio estable es una curva plana, perfectamente definida para cada valor de P , cuya flecha máxima calculamos más arriba.
3. Son posibles otras configuraciones de equilibrio, evidentemente inestables y sin ningún interés desde el punto de vista físico: son, como sabemos, las correspondientes a $n = 2, 3, \dots$, en la expresión de la que obtuvimos la carga crítica de Euler. En el análisis desarrollado aquí, las obtendríamos en la ecuación (1') sustituyendo $\tau/4, \tau/6, \dots$ en lugar de $\tau/2$.
4. La carga crítica de Euler marca pues el límite a partir del cual es de esperar, en general, no la ruptura de la columna AB , pero sí deformaciones importantes incompatibles con el correcto funcionamiento de las estructuras de que una tal columna pudiera formar parte.
5. La solución correcta del problema levanta todas las objeciones que pueden hacerse a la solución aproximada de Euler y nos muestra que los resultados obtenidos a partir de ésta son correctos en lo que se refiere a la determinación del valor límite P_c .
6. Las deformaciones no son proporcionales a la carga; no es pues válido el principio de superposición. La energía potencial elástica, no tiene la forma, cuadrática en f , usual en los demás problemas de Resistencia de Materiales.

⁴ Para otros valores de P se tiene:

Fuerza:	1,0153 P_c	Flecha:	0,1097 τ
	1,0038 P_c		0,0554 τ
	1,0010 P_c		0,0139 τ
	1,00007 P_c		0,00278 τ

7. Conviene poner bien de manifiesto una diferencia entre los resultados obtenidos con la solución aproximada de Euler y con la solución correcta del problema. Con la solución de Euler el pandeo se produciría solo para cargas $P = P_{cr}, 4P_{cr}, 9P_{cr}, \dots$ de los que, «por razones físicas» se elige $P = P_{cr}$. Con la solución correcta el pandeo se produce sólo si $P > P_{cr}$. Con el valor $P = P_{cr}$ la configuración con AB rectilínea es de equilibrio estable.
8. La diferencia que plantean muchos textos, entre pequeñas y grandes deformaciones de una columna esbelta comprimida según su eje, vale desde el punto de vista de las simplificaciones que pueden hacerse, para el primer caso, en el tratamiento matemático del problema, pero confunden para una clara comprensión del fenómeno físico. Este es el mismo sean grandes o pequeñas las deformaciones y la univocidad entre carga y flecha máxima se produce para todo valor de $P = (1 + \varepsilon) P_c$, cualquiera sea ε .

FUERZA AXIAL COEXISTIENDO CON FLEXIONES

Consideremos el caso en que la flexión y el pandeo se producen en el mismo plano; que es el caso más importante. En efecto: Las estructuras esbeltas, y de análisis complejo desde el punto de vista del pandeo, son las grandes cubiertas y los puntos de gran luz.

Consideremos, por ejemplo, un puente como el de la Figura 3. Razones estéticas y económicas pueden hacer muy ligera la vinculación elástica entre el tablero y los arcos, que son la estructura principal de sostén.

Si estos arcos son muy esbeltos, hay que investigar el riesgo de pandeo del arco en el plano de la figura que es también el «plano de flexión». Desde luego el arco puede pandear con una elástica que se salga del plano de la figura, pero en general esto es más fácil de resolver ya que se dispone de todo el ancho del tablero, y, vinculando los arcos, puede obtenerse una estructura cuya rigidez, normalmente al plano de la figura, sea muy grande.

Como veremos luego, en el estudio del pandeo de láminas de doble curvatura, el riesgo de pandeo se produce también en un plano que coincide con el de las flexiones.

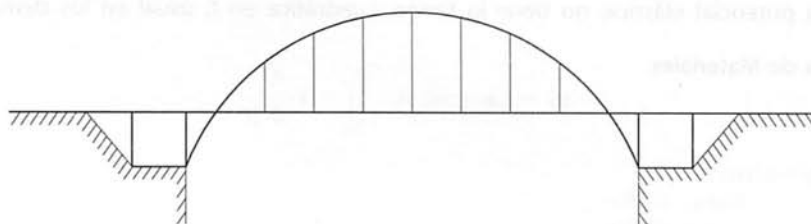


Figura 3

COMPRESION EXCENTRICA DE UNA COLUMNA ESBELTA

Consideremos (Figura 4), el caso de una columna que participa de todas las características del «modelo» de la Figura 2, salvo que la fuerza P , aplicada según AB , tiene una excentricidad, e , respecto al eje de la columna.

Suponemos muy rígida la ménsula, a cuyo extremo está aplicada la fuerza P .

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{P}{EI} \cdot (y + e \cos \cdot \theta_0)$$

$$d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\frac{P}{EI} dy$$

$$\frac{d\theta}{ds} \cdot d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\frac{P}{EI} \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 = \frac{2P}{EI} \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0) = -\frac{4P}{EI} \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Pero

$$\frac{1}{\rho_0} = -\frac{P \cdot e \cdot \cos \cdot \theta_0}{EI}$$

por tanto (eligiendo para $\frac{d\theta}{ds}$, de los dos posibles, el signo compatible con la forma de la elástica):

$$\frac{d\theta}{ds} = -2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \sqrt{\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{4 \cdot EI} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}$$

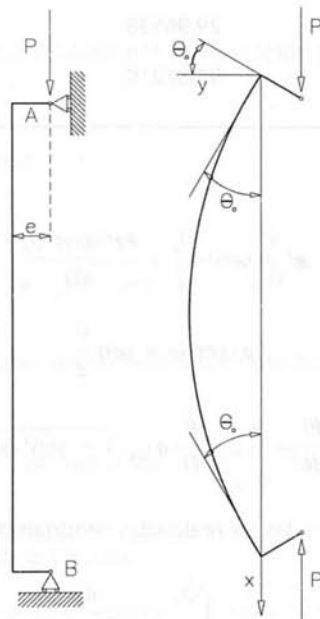


Figura 4

Cuadro 1

$\gamma = \frac{e}{Pcr}$	$\alpha = \frac{P}{Pcr}$	θ_0 en grados	$\frac{f}{\tau}$	$\frac{M}{P \cdot e} = \frac{f/\tau + \gamma}{\gamma}$
0,040	0,40	6,99004	0,03338	1,8345
0,040	0,80	29,85078	0,15188	4,7970
0,040	0,90	41,48169	0,20956	6,2390
0,040	1,00	53,80014	0,26537	7,6342
0,040	1,03	57,35240	0,28020	8,0050
0,020	0,40	3,49504	0,01665	1,8325
0,020	0,80	17,64693	0,09177	5,5885
0,020	0,90	29,16324	0,15238	8,6190
0,020	1,00	44,97670	0,22977	12,4885
0,020	1,03	49,73219	0,25116	13,5580
0,010	0,40	1,77617	0,00853	1,8530
0,010	0,80	9,39644	0,04926	5,9260
0,010	0,90	18,16258	0,09684	10,6840
0,010	1,00	36,95538	0,19394	20,3940
0,010	1,03	43,14325	0,22345	23,3450
0,005	0,40	0,91673	0,00448	1,8960
0,005	0,80	4,81283	0,02532	6,0640
0,005	0,90	10,08398	0,05426	11,8460
0,005	1,00	29,96538	0,16031	33,0620
0,005	1,03	37,87210	0,19965	40,9300

Sean:

$$a^2 = \text{sen}^2 \cdot \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{4EI}$$

$$a \cdot \text{sen } \varphi = \text{sen} \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2 \varphi}$$

Haciendo transformaciones análogas a las ya realizadas tendríamos:

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{\frac{P}{EI}}} \cdot \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi}}$$

donde φ_0 es el valor de φ para $\theta = \theta_0$ que vale:

$$\varphi_0 = \arcsen \cdot \frac{\text{sen } \theta_0/2}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{P \cdot e^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{4EI}}}$$

De la expresión de τ sacamos:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P\tau^2}{EI}} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \text{sen}^2 \varphi}} = \int_0^{\arcsen \frac{\text{sen } \theta_0/2}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{P \cdot e^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}\right) \text{sen}^2 \varphi}}$$

Sea $P = \alpha Pcr$ y $e = \gamma \cdot \tau$

$$P = \alpha \frac{\pi^2 EI}{\tau^2} \text{ por tanto } \sqrt{\frac{P\tau^2}{EI}} = \pi \sqrt{\alpha}$$

$$\frac{Pe^2}{4EI} = \frac{\alpha \cdot \pi^2 EI}{\tau^2} \cdot \frac{1}{4EI} \cdot \gamma^2 \tau^2 = \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = \int_0^{\arcsen \frac{\text{sen } \theta_0/2}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0\right) \text{sen}^2 \varphi}}$$

θ_0 es la solución de la ecuación (6) que resuelta por computación para distintos valores de α y γ aparece en la tercera columna del Cuadro 1.

Para calcular la flecha recordemos que:

$$\frac{d\theta}{a \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2 \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{P}{EI}} ds$$

por lo tanto, procediendo como en el caso de excentricidad nula tendríamos:

$$2a \cdot \text{sen } \varphi \cdot d\varphi = - \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot dy$$

Luego si f es la ordenada máxima de la elástica:

$$2a \int_0^{\varphi_0} \text{sen } \varphi \cdot d\varphi = 2a (-\cos \varphi_0 + 1) = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot f$$

o sea:

$$2 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}} \left(1 - \cos \cdot \arcsen \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}}} \right) = f \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

y, usando los valores α y γ ya definidos:

$$2 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0} \left(1 - \cos \cdot \arcsen \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0}} \right) = f \sqrt{\frac{\alpha \cdot \pi^2}{\tau^2}} = \pi \frac{f}{\tau} \sqrt{\alpha} \quad (6)$$

Los valores de f/τ calculados en función de α y γ aparecen en el Cuadro 1, el que muestra que la flecha, ya para valores cercanos a P_{cr} , es de un orden que no es coherente con la hipótesis de que la «macrogeometría» se mantiene.

Para valores pequeños de α , será en general admisible usar la expresión aproximada $1/\rho = y''$.

En este caso:

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} = -P(y + e) \quad (\text{ya que } \cos \cdot \theta_0 \sim 1)$$

$$y = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{P}{EI}} x - e$$

Para $x = 0, y = 0, x = \frac{\tau}{2}, y' = 0$.

Resulta:

$$y = e \left(\operatorname{tg} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \operatorname{cos} \sqrt{\frac{P}{EI}} x - 1 \right)$$

Por lo tanto, la flecha respecto al eje x será:

$$f = \frac{1 - \operatorname{cos} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2}}{\operatorname{cos} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot e$$

y el momento máximo

$$M = P(e + f) \quad \text{por tanto} \quad \frac{M}{P \cdot e} = \frac{1}{\operatorname{cos} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}} \quad (7)$$

En la Figura 5 se ha dibujado la relación M/Pe con la hipótesis de Euler, usando la fórmula (7) aún más allá de su campo de validez aproximado, y exactamente con el valor de f que figura en el cuadro 1. Los resultados del cuadro 1 graficados suponen una familia de curvas con $\gamma = \text{cte.}$ en que M/Pe resulta función de α . Todas las curvas pasan por el punto (0, 1) siendo allí tangentes a la recta $M/P \cdot e = 1$.

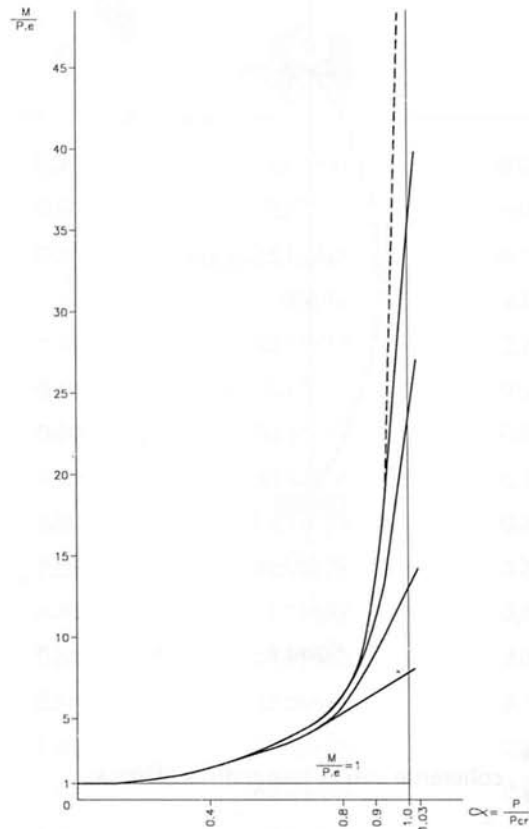


Figura 5

La Figura 5 nos muestra que hasta $P = 0,4 P_{cr}$ coinciden los momentos calculados según la solución exacta y según la que podemos llamar «de Euler» ($1/\rho = y''$). A partir de $P = 0,4 P_{cr}$ se separan las curvas representativas de los momentos, en función de P/P_{cr} . Con la solución de Euler y para $P \rightarrow P_{cr}$ $M \rightarrow \infty$ resultado sin interés ni significado físico ya que lo obtenemos usando una ecuación en un intervalo en que no es coherente con lo que pretendemos estudiar.

CARGA AXIAL DE UNA COLUMNA ESBELTA COEXISTIENDO CON CARGAS EN EL PLANO DE MENOR RIGIDEZ DE LA COLUMNA

Como lo que nos interesa es precisar los conceptos, consideraremos sólo el caso simple de una carga $\omega \cdot P$ en el medio de la luz (Figura 6), dada la imposibilidad, cuando usamos la expresión correcta de la curvatura, de integrar expresiones generales.

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -P \cdot y - \frac{\omega P}{2} \cdot x \quad \text{por tanto} \quad \frac{EI}{P} d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -dy - \frac{\omega}{2} \cdot dx$$

$$\frac{EI}{P} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\text{sen } \theta \cdot d\theta - \frac{\omega}{2} \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\frac{1}{2} \frac{EI}{P} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \cos \theta - \cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} (\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_0)$$

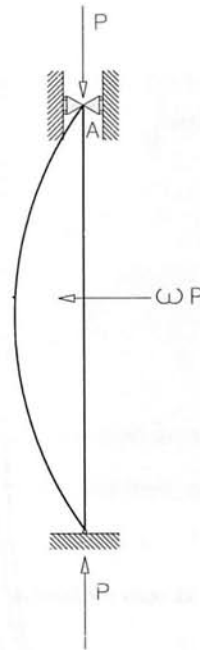


Figura 6

por tanto, eligiendo el signo de $\frac{d\theta}{ds}$, coherente con la forma de la elástica:

$$\sqrt{\frac{EI}{2P}} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta_0 \right)}$$

por tanto, dada la simetría de la elástica:

$$\sqrt{\frac{2P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta_0 \right)}}$$

Usando la notación $\alpha = P/Pcr$ resulta:

$$\alpha = \frac{P}{Pcr} ; \quad \frac{M}{\omega \cdot P \cdot \tau/4} = \frac{f/\tau + \omega/4}{\omega/4}$$

$$\pi \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta_0 \right)}}$$

Para cada valor de ω ($=0,01; 0,02; \dots$), y para cada valor de α ($=0,2; 0,4; 0,8; 1; 1,03$); tendremos una serie de ecuaciones de que podremos sacar los θ_0 correspondientes que figuran en el Cuadro 2.

Cuadro 2

ω	α	θ_0 en grados	$\frac{f}{\tau}$	$\frac{M}{\omega \cdot P \cdot \tau/4}$
0,02	0,40	0,57296	0,00319	1,6380
0,02	0,80	5,38578	0,02925	6,8500
0,02	0,90	23,31914	0,12405	25,8100
0,02	1,00	52,88342	0,26216	53,4320
0,02	1,03	59,12759	0,28667	58,3340
0,04	0,40	1,14591	0,00637	1,6370
0,04	0,80	10,37045	0,05617	6,6170
0,04	0,90	30,42374	0,16010	17,0100
0,04	1,00	55,17523	0,27159	28,1590
0,04	1,03	60,90279	0,29350	30,3500
0,06	0,40	1,71887	0,00955	1,6367
0,06	0,80	14,95406	0,08075	6,3833
0,06	0,90	35,06464	0,18293	13,1953
0,06	1,00	57,12326	0,27943	19,6287
0,06	1,03	62,44893	0,29931	20,9540
0,08	0,40	2,29183	0,01274	1,6370
0,08	0,80	18,96471	0,10201	6,1005
0,08	0,90	38,67422	0,20025	11,0125
0,08	1,00	58,84128	0,28622	15,3110
0,08	1,03	63,88054	0,30464	16,2320
0,10	0,40	2,86479	0,01593	1,6372
0,10	0,80	22,51701	0,12062	5,8248
0,10	0,90	41,59628	0,21396	9,5584
0,10	1,00	60,33014	0,29197	12,6788
0,10	1,03	65,08308	0,30897	13,3588

Para calcular la flecha procedemos como antes. De la expresión:

$$\sqrt{\frac{2P}{EI}} \cdot ds = - \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta - \left(\cos \theta_0 + \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta_0 \right)}}$$

multiplicando los dos miembros por $\operatorname{sen} \theta$, y volviendo a usar la simetría de la elástica:

$$\frac{2P}{EI} \cdot f = \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{sen} \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta - \cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \theta_0}}$$

$$\pi \sqrt{2\alpha} \cdot \frac{f}{\tau} = \int_0^{\theta_0} \frac{\text{sen } \theta \, d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{1}{2} \text{sen } \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{1}{2} \text{sen } \theta_0 \right)}}$$

Sea C el valor de la integral:

$$f = \frac{1}{\pi \sqrt{2\alpha}} \cdot C \cdot \tau$$

El momento en este caso será:

$$M = \frac{C}{\pi \sqrt{2\alpha}} \cdot P \cdot \tau + \frac{\omega P}{4} \tau \quad \text{por tanto} \quad M / \frac{\omega \cdot P \cdot \tau}{4} = 1 + \frac{4C}{\pi \omega \sqrt{2\alpha}}$$

Por consiguiente podemos dibujar (Figura 7) la familia de curvas ($\omega = \text{cte.}$) que nos expresan la variación de:

$$M / \frac{\omega \cdot P \cdot \tau}{4} \quad \text{en función de } \alpha, \quad \text{para } \omega = \text{cte.}$$

Determinemos $M / \frac{\omega \cdot P \cdot \tau}{4}$, suponiendo válida la expresión $1/\rho = y''$; tendremos:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py - \frac{\omega \cdot P}{2} \cdot x \quad \text{por tanto} \quad \text{La solución general es: } \left(\text{para } x \leq \frac{\tau}{2} \right)$$

$$y = C_1 \text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \frac{\omega}{2} x$$

Si $x = 0, y = 0$; Si $x = \frac{\tau}{2}, y' = 0$

$$y = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x}{\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P\tau^2}{EI}}} - x \right) = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\text{sen} \sqrt{\alpha} \cdot \frac{\pi}{\tau} x}{\pi \sqrt{\alpha} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}} - x \right)$$

por tanto

$$f = \frac{\omega \tau}{2} \left(\frac{1}{\pi \sqrt{\alpha}} \text{tg} \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

Luego:

$$M = \frac{P\omega\tau}{2} \left(\frac{1}{\pi \sqrt{\alpha}} \text{tg} \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega P \tau}{4}$$

por tanto

$$M / \frac{\omega P \tau}{4} = \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha}} \text{tg} \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2}$$

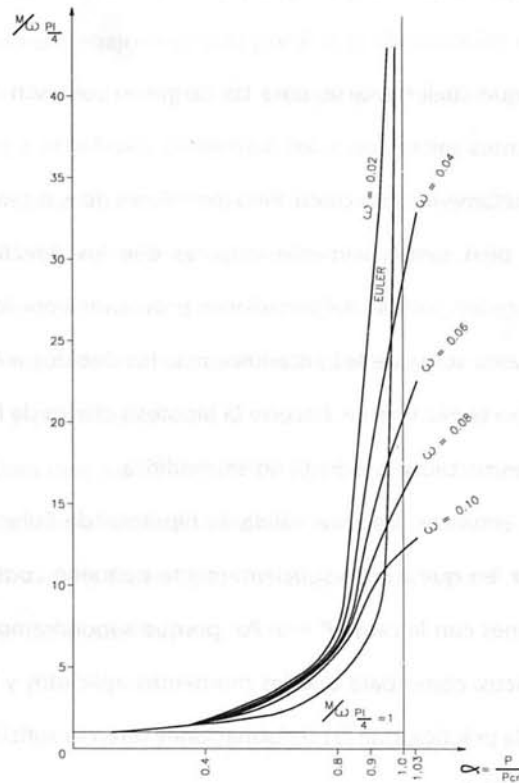


Figura 7

También aquí para $\alpha \rightarrow 1$ $M \rightarrow \infty$ resultado sin valor ya que lo obtenemos usando una ecuación en un intervalo en que no es coherente con lo que queremos estudiar.

Otros tipos de «apartamiento» del modelo ideal de la columna esbelta nos llevarían a resultados análogos.

RESUMIENDO LO OBTENIDO HASTA AQUI PODEMOS ESTABLECER LO SIGUIENTE

En el caso ideal de partida (Figura 2) para $P \leq P_{cr}$ el equilibrio es estable; apartando la columna de su posición de equilibrio, con su eje rectilíneo, y eliminando la causa que produjo este apartamiento, se restablece la configuración inicial de equilibrio de eje rectilíneo. Si $P > P_{cr}$ la configuración inicial no es estable. Apartada la columna de esa posición inicial, y retirada la causa de ese apartamiento, se mantiene una deformación, de elástica perfectamente definida para cada valor de P. Con la obvia limitación de no producir deformaciones permanentes, la configuración de la columna deformada es de equilibrio estable. Existe pues, una verdadera discontinuidad en el comportamiento de la columna, definida por el valor $P = P_{cr}$.

Cuando coexisten flexiones, en el plano de menor rigidez de la columna, con la carga según su eje, inicialmente rectilíneo, no existe discontinuidad. A esas flexiones, se superpone la debida a la carga axial; los momentos finales, suma de los aplicados y de los debidos a la carga axial, superan aquellos sustancialmente; por ejemplo para cargas 5 veces inferiores a P_{cr} , entre 20 y 30%. Al acercarnos a P_{cr} los momentos finales

umentan mucho produciéndose deformaciones, y en general tensiones, incompatibles con el buen comportamiento de cualquier estructura.

Los coeficientes de seguridad que suelen usarse, para las cargas axiales, son del orden de 4; frente a la carga crítica. Para los correspondientes valores de α , los momentos calculados a partir de la hipótesis aproximada $1/\rho = y''$, y los calculados exactamente, coinciden. Para los valores de α , o sea de la carga P , usados en la técnica, los momentos totales, si bien sustancialmente mayores que los directamente aplicados, son del mismo orden; también del mismo orden son las deformaciones provocadas por los momentos directamente aplicados, y por los momentos totales, suma de los anteriores más los debidos a $P = \alpha \cdot P_{cr}$.

Puede, en los casos que interesan técnicamente, hacerse la hipótesis clásica de la Resistencia de Materiales, de que la macrogeometría de las estructuras estudiada no se modifica.

En lo que sigue supondremos entonces, siempre válida, la hipótesis de Euler $1/\rho = y''$. En el caso ideal, porque admitiremos $P = (1 + \varepsilon) P_{cr}$, en que ε es lo suficientemente pequeño como para que dicha hipótesis sea válida. Cuando coexisten flexiones con la carga $P = \alpha \cdot P_{cr}$, porque supondremos que α tiene un valor, que es el usual en los problemas prácticos, como para que los momentos aplicados y los totales sean del mismo orden, lo que supone, también en la práctica, que las deformaciones serán lo suficientemente pequeñas como para que la hipótesis $1/\rho = y''$ sea válida.

LA APLICACION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA A LOS PROBLEMAS DE PANDEO

En los problemas usuales de estabilidad, las cargas se aplican de tal manera que los movimientos debidos a las deformaciones de las estructuras estudiadas son tan lentos como para poder desprejciar, sin error apreciable, las energías cinéticas, caloríficas, etc., en juego. El intercambio energético será siempre entonces una transformación de la energía potencial de las cargas aplicadas a la estructura, en energía potencial de deformación.

Hagamos nuevamente referencia a nuestro modelo ideal de la Figura 2. Apartamos la columna AB , cuyo peso suponemos desprejciar, de su configuración inicial de equilibrio, mediante la fuerza P' ; sea δ' la deformación en correspondencia con P' . Si ΔU es la variación de la energía potencial elástica, que se produce cuando la columna pasa de la posición inicial en que AB es una recta (la columna tiene entonces solamente energía potencial de compresión), a la posición final flexada, se tiene:

$$\Delta U = P \cdot z + T_p$$

en que T_p es el trabajo realizado por la fuerza P' . Suponiendo, por ejemplo, $P' = \lambda \cdot y$; $T_p = P' \cdot \delta/2$. Podemos suponer $P' = \lambda \cdot y$, y válida a la vez la ecuación anterior, si suponemos P' aplicado gradualmente, con suficiente lentitud como para desprejciar, sin error sensible, las energías cinéticas, etc.

Retiremos P' . Sabemos que si $P \leq P_{cr}$, la columna volverá a su posición inicial; lo que, energéticamente expresamos, diciendo que el trabajo realizado por P , o la disminución de su energía potencial, no alcanza a suministrar a la columna el aumento de la energía potencial elástica que tiene cuando está deformada⁵.

Si $P > P_{cr}$ sabemos que existe una configuración de equilibrio estable, de flecha δ , para cada valor de P . Esta configuración de equilibrio será aquella en que la disminución de la energía potencial de P iguale a la energía de deformación de la columna, si podemos despreciar las demás energías en juego.

Para cada valor de P será distinta la variación $P \cdot z$ de su energía potencial; ya que son distintos P y z , luego la energía de deformación y por consiguiente la elástica serán también distintas. Si $P = (1 + \varepsilon)P_{cr}$ con ε , lo suficientemente pequeño para que sea lícito escribir $1/\rho = y''$, podemos obtener, en el límite, la carga crítica de la ecuación de la energía; será el valor P cuando $\varepsilon = 0$.

En el caso del modelo ideal de la Figura 2, sabemos que para cargas $P = (1 + \varepsilon)P_{cr}$, en que ε sea suficientemente pequeño, la ecuación de la elástica será:

$$y = f \cdot \text{sen} \frac{\pi}{\tau} \cdot x$$

(ya sabemos cómo levantar la indeterminación de f , que no resulta determinada usando la expresión $1/\rho = y''$; esa indeterminación sólo puede eliminarse conociendo ε).

Suponemos que se cumplen todas las hipótesis hechas por el modelo ideal. Luego la carga $P_{cr} (1 + \varepsilon)$ deformará la columna por compresión sin que se produzca el pandeo y es a partir de esa posición de equilibrio de la columna comprimida que se producirá el pandeo, cuando apartamos la columna de su posición de equilibrio y eliminamos la causa que produce el apartamiento.

Si ε es lo suficientemente pequeño, f también lo es y, por la pequeñez de f y la esbeltez de la columna será también despreciable la energía debida al cortante genérico $P \text{ sen } \theta$. Nos queda sólo la variación de la energía potencial elástica de flexión, nula en la posición inicial, por tanto:

$$\Delta U = \int_0^{\tau} \frac{M^2 dx}{2EI}, \text{ haciendo } ds \sim dx$$

$$M = -P \cdot f \text{ sen} \frac{\pi}{\tau} x \quad \text{por tanto} \quad U = \frac{P^2 f^2}{2EI} \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \tau = \frac{1}{4} \frac{P^2 \cdot f^2 \cdot \tau}{EI}$$

⁵ Dicho de otra forma: El resorte que es la columna flexada tiene una energía de deformación almacenada superior a la necesaria para llevar la carga P a su posición inicial. La energía total del sistema experimenta una variación:

$$\Delta E = P \cdot z - \Delta \Delta U$$

Para $P \leq P_{cr}$ $\Delta E < 0$ por tanto la configuración rectilínea de equilibrio era estable ya que E pasa por un mínimo.

Por otra parte: $z = \tau - c$ en que τ es la longitud de la columna y c la cuerda de su elástica, o sea:

$$z = \int_0^{\tau} (ds - dx)$$

$$ds - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

ya que $\frac{dy}{dx}$ es muy pequeño si ε lo es.

Luego:

$$z = \frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \approx dx \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

En nuestro caso:

$$z = \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \tau = \frac{1}{4} \cdot \frac{f^2 \pi^2}{\tau}$$

por tanto, la carga crítica será la solución de la ecuación:

$$\frac{1}{4} \frac{P^2 f^2}{EI} \tau = P \cdot \frac{1}{4} \cdot f^2 \cdot \frac{\pi^2}{\tau} \quad \text{por tanto} \quad P = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\tau^2}$$

La utilidad del método de la energía no está, obviamente, en encontrar de una manera más complicada lo que ya sabemos sino en mostrar que, con procedimientos aproximados, pueden encontrarse soluciones suficientemente exactas.

En efecto hay casos en que la integración de la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{M}{EI}$$

aún en la hipótesis de Euler, puede ser muy complicada; usando la ecuación de la energía y asumiendo para la elástica expresiones que, sin ser exactas, podemos acercarnos a la real por consideraciones cualitativas, obtenemos resultados satisfactorios, y empezamos a ver, además, la viabilidad, en principio, del método de aproximaciones sucesivas que explicaremos más adelante.

Para verlo elijamos para la elástica una forma deliberadamente errónea; supongamos que:

$$y = \frac{4f}{\tau} \cdot \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)$$

$$M = \frac{4Pf}{\tau} \cdot \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)$$

por tanto

$$\Delta U = \frac{16P^2f^2}{2\tau^2EI} \int_0^1 x^2 \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)^2 dx = \frac{4}{15} \cdot \frac{P^2f^2\tau}{EI}$$

$$y' = \frac{4f}{\tau} \left(1 - \frac{2x}{\tau}\right)$$

$$z = \frac{1}{2} \int_0^\tau y^2 dx = 8 \frac{f^2}{\tau^2} \int_0^\tau \left(1 - \frac{2x}{\tau}\right)^2 dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{\tau}$$

por tanto

$$\frac{4}{15} \frac{P^2f^2\tau}{EI} = \frac{8}{3} \frac{Pf^2}{\tau}$$

lo que da

$$P = \frac{10}{\tau^2} \text{ en lugar de } \frac{\pi^2 EI}{\tau^2}$$

El error es sólo 1,3%, que daría en la práctica una aproximación más que suficiente. Sin embargo, la parábola es una curva muy mal elegida ya que $y'' = \text{cte.}$ en lugar de ser cero en las articulaciones⁶.

Basta elegir una curva cualitativamente más correcta, que tenga $y'' = 0$ en las articulaciones, y sea simétrica respecto al eje de la plaza, para obtener una precisión mayor. Estamos seguros que la elástica de una viga con una carga en el medio de la luz cumple con esas condiciones. En ese caso:

$$y = 3f \left(\frac{3}{\tau} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{\tau^3} \right)$$

ecuación válida para $x \leq \frac{\tau}{2}$

$$\Delta U = 2 \int_0^{\tau/2} \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2f^2}{EI} \cdot \frac{17}{70} \cdot \tau$$

$$Pz = Pz \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\tau/2} y^2 dx = \frac{12}{15} \cdot \frac{Pf^2}{\tau}$$

⁶ Al asumir una elástica es conveniente calcular ΔU a partir de $M = -Py$, y no de $M = -Ely'$ (cosa que hacen textos muy buenos como Feodosiev).

En los métodos gráficos esto es lo único sensato ya que conocemos directamente y , y no y' ; pero aún cuando trabajemos con una expresión de y , pudiendo calcular y' , la aproximación obtenida es inferior porque diferirá en general menos la y elegida de la real que la correspondiente y' de la y' real.

Eligiendo como curva la parábola, el error en las y es muy pequeño, el error en las y' es mayor, variando entre 30% en las articulaciones ($4f/\tau$ para la parábola y $\pi f/\tau$ para la elástica real), y cero en el eje de la columna. Pese a esto la aproximación resulta muy buena (1,3%).

Si usamos la expresión $M = -Ely'$ el error es mucho mayor ya que y' varía en la elástica real de cero a

$$f \frac{\pi^2}{\tau^2} \sim 10 \frac{f}{\tau^2}$$

y en la supuesta vale siempre $\frac{8f}{\tau^2}$.

El error que se obtiene usando la parábola y la expresión $M = -Ely'$ es aprox. 20%.

por tanto

$$P = \frac{168}{17} \cdot \frac{EI}{\tau^2}$$

El error baja a 0,13 %.

Luego usando para el momento de la columna pandeada la expresión $M = -Py$, y asumiendo para y expresiones aproximadas, incluso groseramente aproximadas como la parábola, se obtienen, para la carga crítica, valores en exceso pero con un error plenamente aceptable para las exigencias de la técnica.

Que la carga crítica real sea inferior a la obtenida eligiendo cualquier elástica distinta de la real es algo que puede demostrarse como hacemos más abajo, pero que no puede obtenerse, sin más, a partir de los principios generales.

En efecto: En su *Theory of elastic stability* dice Timoshenko: «Usando el método de la energía con una curva que satisfaga a las condiciones de apoyo, obtendremos siempre un valor de la carga crítica mayor que el verdadero. Esto resulta del hecho de que la elástica real de la barra pandeada es la que corresponde a la menor resistencia de la barra. Solamente por casualidad asumiremos una curva que coincida con la correspondiente a la menor resistencia y dará valores por exceso de la carga crítica. Trabajar con una curva asumida equivale a introducir en el sistema restricciones adicionales que impiden a la barra pandeada, tomar otra forma que la asumida, introducir estas restricciones adicionales supone aumentar la rigidez del sistema y por consiguiente su carga crítica.

Esta línea de razonamiento es plausible y sus consecuencias comprobadas en los hechos, pero no es conceptualmente aceptable porque supone aplicar principios generales sobre el equilibrio de sistemas casos en que estos principios no son aplicables, ya que el sistema sometido sólo a la carga $P_{cr} (1 + \delta)$ y el sistema sometido a la carga P , compatible con una elástica distinta de la real, no son el mismo sistema; puesto que constreñir la columna a tener una elástica distinta de la real, supone, mecánicamente, agregarle fuerzas que llevan la elástica real a la supuesta.

Puede demostrarse, directamente, que, para nuestro modelo ideal de la Figura 2, la carga crítica obtenida por la ecuación de la energía pasa por un mínimo cuando se usa la expresión verdadera de la elástica.

Para demostrarlo recordemos que, para sistemas conservativos como aquellos con los que por hipótesis trabajamos, la energía potencial total, suma de la exterior o de posición, E_0 correspondiente a las cargas aplicadas al sistema, más la interna o de deformación, U , depende solo de los estados inicial y final. Sabemos, además, que hay univocidad entre cargas y configuración geométrica del sistema (en el caso de la estructura pandeada que, dada la carga, la elástica es única) y también que para un estado de equilibrio estable, y el de la estructura pandeada lo es, la energía total pasa por un mínimo. Luego el estado de equilibrio de un sistema conservativo en equilibrio estable se caracteriza por la condición $E_0 + U$ mínimo.

Supongamos ahora que, a partir de la posición de equilibrio del sistema, damos a los puntos A de aplica-

ción de las fuerzas P , que han experimentado desplazamiento δ_A para alcanzar el equilibrio, desplazamientos dA (δA y dA en el sentido de las P). Tendremos: $\Sigma P dA = dU$, por tanto, $d \Sigma P \cdot \delta_A = dU$, que, en el caso de una sola fuerza, toma la forma: $d(P \cdot \delta_A) = dU$.

Consideremos ahora una columna cargada de punta, de sección e incluso módulo de elasticidad constantes o variables, pero con restricciones análogas a las del modelo de la Figura 2.

Sea C su configuración de equilibrio rectilínea cuando la carga es $P(1 + \varepsilon)$ (con ε tan pequeño como queramos), y C' la configuración, también de equilibrio, muy próxima a C , que toma la columna cuando la apartamos de su posición de equilibrio y la abandonamos a sí misma.

La elástica correspondiente a C' se podrá siempre representar por la función

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

con n suficientemente grande, en que las f son funciones adecuadas de x y las a constantes a determinar.

Podemos poner: $P \cdot \delta = P_0 \varphi_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Análogamente: $dU = \varphi_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$Pcr = \frac{\varphi_2(a_1, a_2, \dots)}{\varphi_1(a_1, a_2, \dots)}$$

La configuración C' es unívoca con el valor $Pcr(1 + \varepsilon)$ y es de equilibrio estable, y, además, para C' la energía total es mínima; luego si varío uno cualquiera de los coeficientes a del polinomio, ai , la variación elemental de la energía total será 0, por tanto,

$$d_{ai}(\varphi_2(a_1, a_2, \dots) - Pcr \cdot \varphi_1(a_1, a_2, \dots)) = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial \varphi_2(a_1, a_2, \dots)}{\partial ai} - P_0 \cdot \frac{\partial \varphi_1(a_1, a_2, \dots)}{\partial ai} = 0$$

que ponemos de manera resumida en la forma:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - Pcr \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai} = 0$$

por tanto

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai} = 0$$

por tanto

$$\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai} = 0$$

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial ai} = \frac{\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai}}{\varphi_2}$$

por tanto

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial ai} = 0$$

Luego, cuando elegimos como elástica la real, la carga crítica, calculada a partir de la ecuación de la energía, pasa por un mínimo o un máximo. Que es un mínimo resulta claro ya que, para elásticas próximas a la real, vimos que $P \sim P_{cr}$ pero mayor.

Es obvio que la demostración anterior que, para fijar ideas hemos hecho a partir del modelo ideal de la Figura 2, vale también para el caso de que la columna tenga otros vínculos, aparte de las articulaciones *A* y *B*, y que, además, es conceptualmente generalizable a otro tipo de estructuras a los que pueda serles aplicable la ecuación de la energía.

EL METODO DE LAS APROXIMACIONES SUCESIVAS

Hay casos, el de los arcos por ejemplo, en que puede no ser aplicable la ecuación de la energía, como luego veremos. La determinación de la carga crítica puede entonces hacerse por el método de las aproximaciones sucesivas que exponemos a partir del ejemplo de la Figura 8: Columna *AB*, tubular de acero, de 6 m de largo, de sección variable, cuyo diámetro exterior en *A* es de 10 cm y en *B* de 15 cm con espesor de 6 mm, articulada en *A* y *B* en condiciones análogas a la del modelo ideal de la Figura 2. Nuestro proceso consistirá en determinar P_{cr} , carga que coexista con un estado de equilibrio que tenga una elástica de flecha máxima que, en la hipótesis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ será indeterminada.}$$

Si la sección fuera constante sabemos que la elástica sería una senoide pasando por *A* y *B*, de flecha máxima a media altura. La menor rigidez de la parte superior de la columna hace que el punto de flecha máxima se corra hacia *A*. Las etapas del proceso de aproximaciones sucesivas son las siguientes:

1. Determinamos el valor probable de P_{cr} , a partir del

$$I_{medio} = \sqrt[5]{I_A \cdot I_M \cdot I_N \cdot I_P \cdot I_B} = \sqrt[5]{196,50 \cdot 282,52 \cdot 398,07 \cdot 536,90 \cdot 704,78} = 384,93 \text{ cm}^4$$

$$\text{Con } E = 2,05 \cdot 10^6 \text{K/cm}^2 \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{medio}}{\tau^2} = 21.634 \text{ K}$$

Tomo para los tanteos $P = 21.600$.

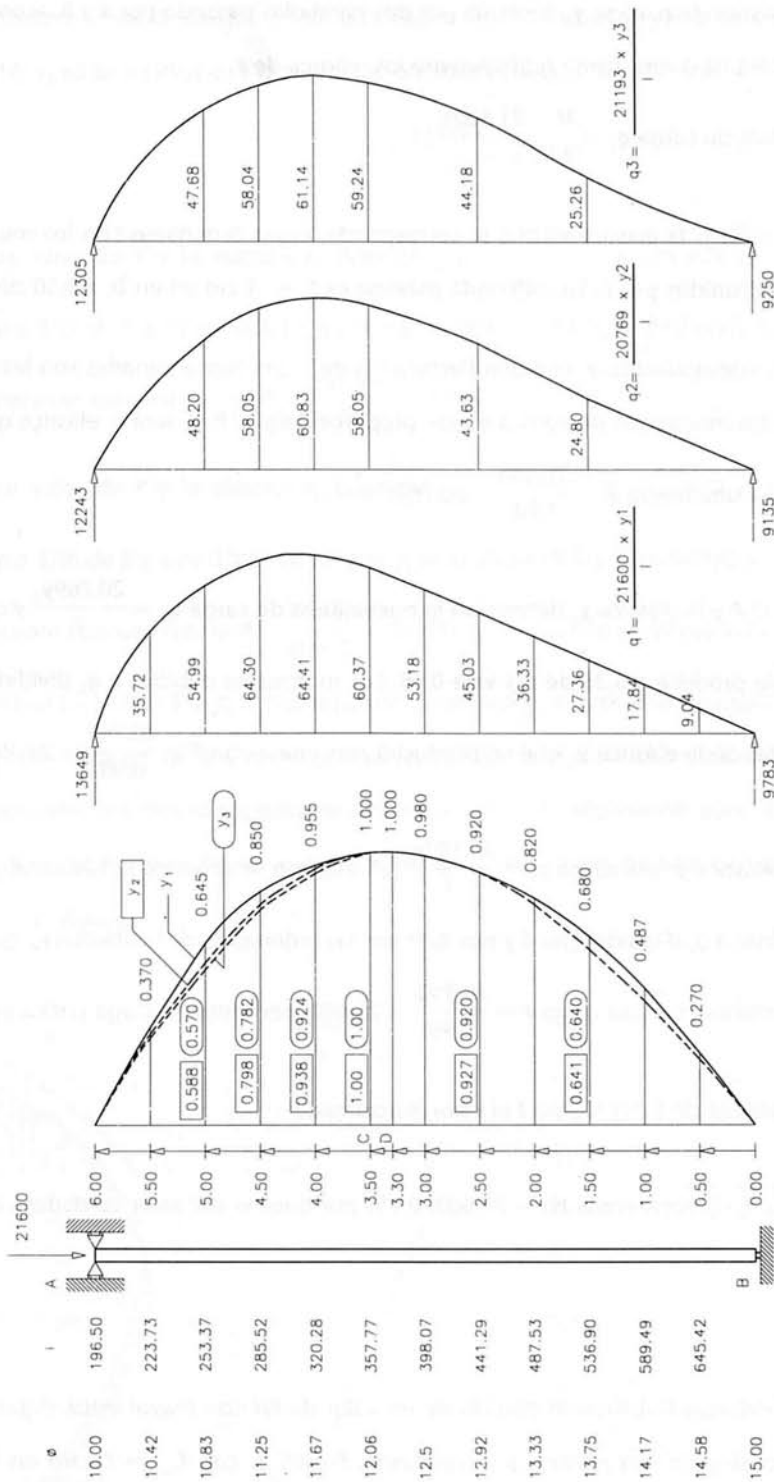


Figura 8

- NOTAS:
1. Las ordenadas de las líneas de carga se expresan en $K \cdot cm^{-3}$.
 2. Las áreas correspondientes a estas líneas de carga resultan expresadas en $K \cdot cm^{-2}$.
 3. Los momentos en $K \cdot cm^{-1}$.
 4. Para obtener las flechas hay que dividir estos momentos por $E \cdot Kcm^{-2}$. El resultado es la flecha en cm.
 5. Para los cálculos se ha considerado que las líneas de carga son poligonales cuyos vértices tienen las ordenadas que se indican.

2. Asumo como elástica de partida, y_1 , formada por dos parábolas pasando por A y B , acordadas en C , con una flecha máxima de 1 cm. Tomo gráficamente los valores de y_1 .
3. Determino la línea de carga $q_1 = \frac{M}{l} = \frac{21.600y_1}{l}$.
4. Con esta carga calculo la elástica y_2^* que le corresponde, cuyas ordenadas son los momentos correspondientes a q_1 divididos por E . Su ordenada máxima es $f_2 = 1,04$ en D , a 3,30 de B .
5. Tomamos como nueva elástica y_2 con una flecha en D de 1 cm. Sus ordenadas son las de y_2^* divididas por 1,04. Como los momentos debidos a q_1 son proporcionales a P , y_2 será la elástica que hubiéramos obtenido con y_1 y una fuerza $P = \frac{21.600}{1,04} = 20.769$.
6. Con este valor de P y la elástica y_2 determino la nueva línea de carga $q_2 = \frac{20.769y_2}{l}$ y con ella y_3^* cuya flecha máxima se produce a 3,28 de B y vale 0,98. Los momentos debidos a q_2 divididos por E y 0,98 son las ordenadas de la elástica y_3 que se producirá con una carga $P = \frac{20.769}{0,98} = 21.193$ K.
7. Tomo y_3 como elástica y una carga $q_3 = \frac{21.193y_3}{l}$; el máximo se produce a 3,28 de B y vale 0,99. Los momentos debidos a q_3 divididos por E y por 0,99 son las ordenadas, de la elástica y_4 , que coincide con y_3 , y que se producirá con una carga $P = \frac{21.193}{0,99} = 21.407$, por tanto, la carga crítica es 21.407 K.

Luego, usando la fórmula de Euler y para l el valor aproximado

$$l_{\text{medio}} = \sqrt[5]{I_A \cdot I_M \cdot I_N \cdot I_P \cdot I_B} \text{ obtenemos } P_{cr} = 21.600; 0,9\% \text{ por encima del valor verdadero } 21.407^7.$$

Ejemplo 2º

1. Supongamos ahora que hubiéramos partido de un valor de P_{cr} con mayor error, digamos 23.000 K, y que hubiéramos elegido una elástica y_1 inadecuada, Figura 8, con $f_{\text{máx}} = 1$ cxm en C , a 4 m de B , formada por dos parábolas acordadas en C .
2. Cargamos la columna con $q_1 = \frac{23.000y_1}{l}$ y determinamos la elástica y_2^* cuyas ordenadas son los momentos debidos a q_1 divididos por E ; su ordenada máxima en D , a 3,37 de B , vale 1,114.

⁷ Para cada «familia» de problemas es posible encontrar reglas prácticas que permitan obtener P_{cr} con aproximación suficiente; pero, para obtener esas reglas, es indispensable la seguridad que sólo pueden dar los procesos más exactos de que son ejemplo los explicados aquí.

3. Tomamos como nueva elástica y_2 con una flecha de 1 cm en D , cuyas ordenadas son las y_2^* divididas por 1,114; y_2 es la elástica que hubiéramos obtenido con y_1 y una fuerza

$$P = \frac{23.000}{1,114} = 20.650$$

4. Con este valor de P y la elástica y_2 determino $q_2 = \frac{20.650y_2}{l}$ y con ella y_3^* cuya flecha máxima se produce a 3,29 de B y vale 0,963. La elástica y_3 se obtiene de la y_3^* dividiendo sus ordenadas por 0,963, y es coherente con una fuerza $P = \frac{20.650}{0,963} = 21.443$.

5. Con este valor de P y la elástica y_3 determino $q_3 = \frac{21.443y_3}{l}$ y con ella y_4^* cuya flecha máxima se produce a 3,28 de B y vale 0,995. La elástica y_4 se obtiene de la y_4^* dividiendo sus ordenadas por 0,995 y es coherente con una fuerza $P = \frac{21.443}{0,995} = 21.551 \cdot y_4$ resulta en el dibujo indiscernible de y_3 . Luego la carga crítica es 21.551 a la que corresponde la elástica y_4 prácticamente igual a y_3 .

Los valores obtenidos en las dos series de tanteos, 21.407 y 21.551, difieren en 0,67%. Esta diferencia se debe a la imprecisión del método gráfica-analítico⁸ usado y es irrelevante para la solución de cualquier problema concreto. Las elásticas finales correspondientes a las 2 series de tanteos, coinciden con diferencias indiscernibles en el dibujo.

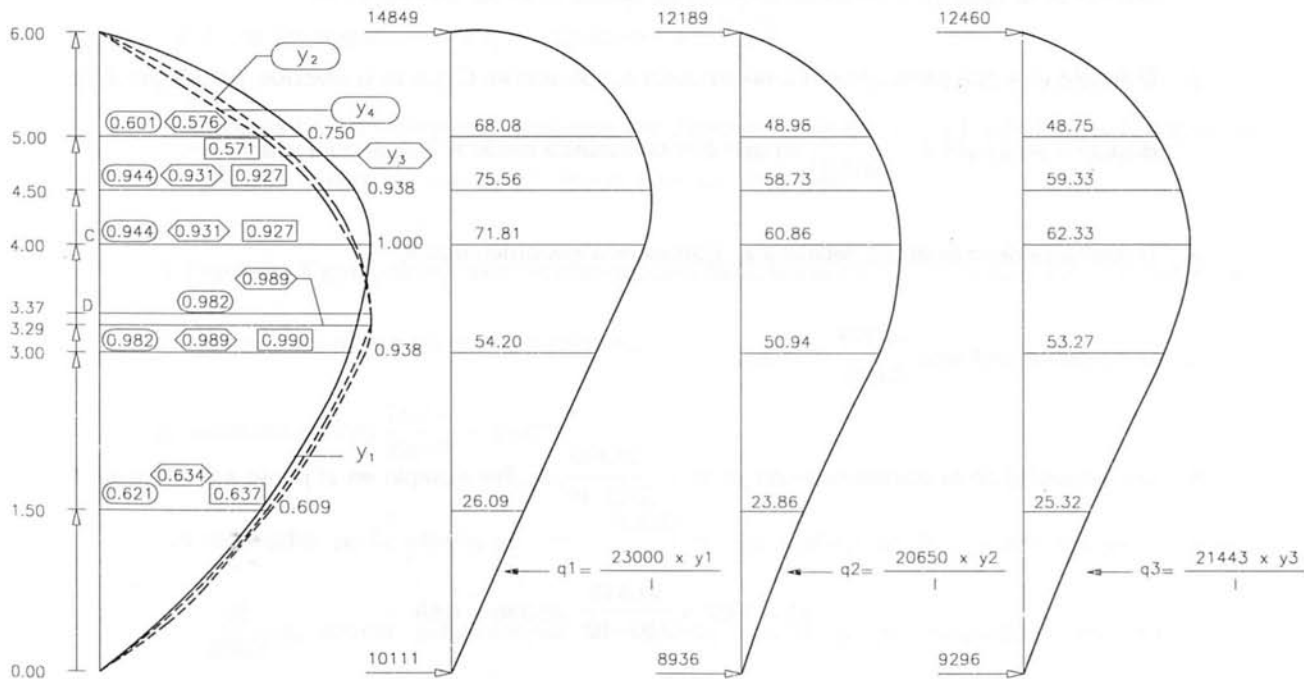


Figura 9

⁸ Que podría reducirse a voluntad aumentando la escala, el número de cargas $q\Delta s$ y el número de cifras con los que se quiera trabajar.

Ejemplo Figura 10

Columna de acero *ABC*, de longitud $AC = 6$ m formada por un trozo tubular *AB* de 5 m de largo, \varnothing exterior = 10 cm y 6 mm de espesor y un plinto m *BC*, de $\varnothing = 10$ cm en *B* y 20 cm en *C*, articulada en *A* de manera análoga a la articulación *A* de la Figura 2 y empotrada en *C*.

Si la columna tuviera sección uniforme la configuración de pandeo tendría un punto de inflexión a $0,7 \cdot 6 = 4,20$ de *A*; la mayor rigidez del plinto levanta el punto de inflexión, que supondremos a 4 m de *A*, obteniendo la elástica y_1 . Podemos tener una primera aproximación de *Pcr* con la fórmula de Euler.

$$\frac{\pi^2 \cdot 2,05 \cdot 10^6 \cdot 196,50}{4^2 \cdot 10^4} = 24.850 \text{ K}$$

(ya que el punto de inflexión cae en la parte de sección tubular constante). Para calcular *Pc* tomo como elástica de partida y_1 formada por una parábola de flecha 1 en *D* y cuerda de 4 m, acordada en *E*, con otra parábola de tangente vertical en *C*. Con esta elástica obtengo q_1 . Determino:

1. Las reacciones, que, partidas por *E*, son los ángulos en *A* y *C*. En particular el ángulo en *C* vale $\frac{13.779}{E}$.
2. El diagrama de momentos de la columna, simplemente apoyada en *A* y *C*, que, partido por *E*, nos da la elástica de la columna en esas condiciones de apoyo. Sean sus ordenadas θ_1 .
3. El ángulo en *C* que produce un momento unitario, aplicado en *C*, que es la reacción, partida por *E*, del diagrama de cargas $q_0 = \frac{Z}{600 \cdot I}$, en que *Z* es la distancia desde *A*. Este ángulo vale $\frac{0,646}{E}$.
4. El diagrama de momentos debido a q_0 . Llamemos a sus ordenadas θ_0 .
5. El momento en *C* vale $\frac{13.779}{0,646} = 21.330$.
6. Las ordenadas de la elástica que son $y_2^* = \theta_1 - \frac{21.330}{2,05 \cdot 10^6} \theta_0$. Por ejemplo en el punto a 1 metro de *A*:

$$y_2^* = 1,07 - \frac{21.330}{2,05 \cdot 10^6} \cdot 46,386 = 0,59$$

La elástica correspondiente a y_2^* es análoga a y_1 y tiene su máximo en *D*: 0,82. Luego la elástica

$$y_2 = \frac{y_2^*}{0,82} \text{ que es compatible con una fuerza } \frac{24.850}{0,82} = 30.305.$$

Los resultados de estos cálculos se sintetizan en el cuadro siguiente:

Distancia desde A	θ_1	$\frac{21.330}{2,05 \cdot 10^6} \theta_0$	y_2^*	y_2
100	1,068	0,483	0,585	0,711
200	1,700	0,877	0,823	1,000
300	1,743	1,095	0,648	0,787
400	1,310	1,048	0,262	0,318
500	0,672	0,65	0,024	0,029

Los demás valores de y_2 , indicados en la Figura 10, se toman gráficamente.

7. Tomo como elástica y_2 y con $P = 30.305$ cargo la columna con $q_2 = \frac{30.305y_2}{l}$. Las reacciones, partidas por E , son los ángulos en A y C; el ángulo en C es $\frac{16.714}{E}$.
8. El diagrama de momentos de la columna, simplemente apoyada en A y C, partido por E , nos da su elástica para la condición de simple apoyo. Sean sus ordenadas θ_2 .
9. El ángulo en C que produce el momento unitario allí aplicado es $\frac{0,646}{E}$ y las ordenadas debidas a q_0 son las ya calculadas a las que llamamos θ_0 .
10. El momento en C es $\frac{16.714}{0,646} = 25.873$.
11. Las ordenadas de la elástica $y_3^* = \theta_2 - \frac{25.873}{E} \theta_0$. Su máximo en D es 0,983. Luego la elástica $y_3 = \frac{y_3^*}{0,983} \cdot y_2$ resulta prácticamente coincidente con y_2 y es compatible con una fuerza $\frac{30.305}{0,983} = 30.830$ que es la carga crítica.

Los resultados del segundo tanteo se sintetizan en el cuadro:

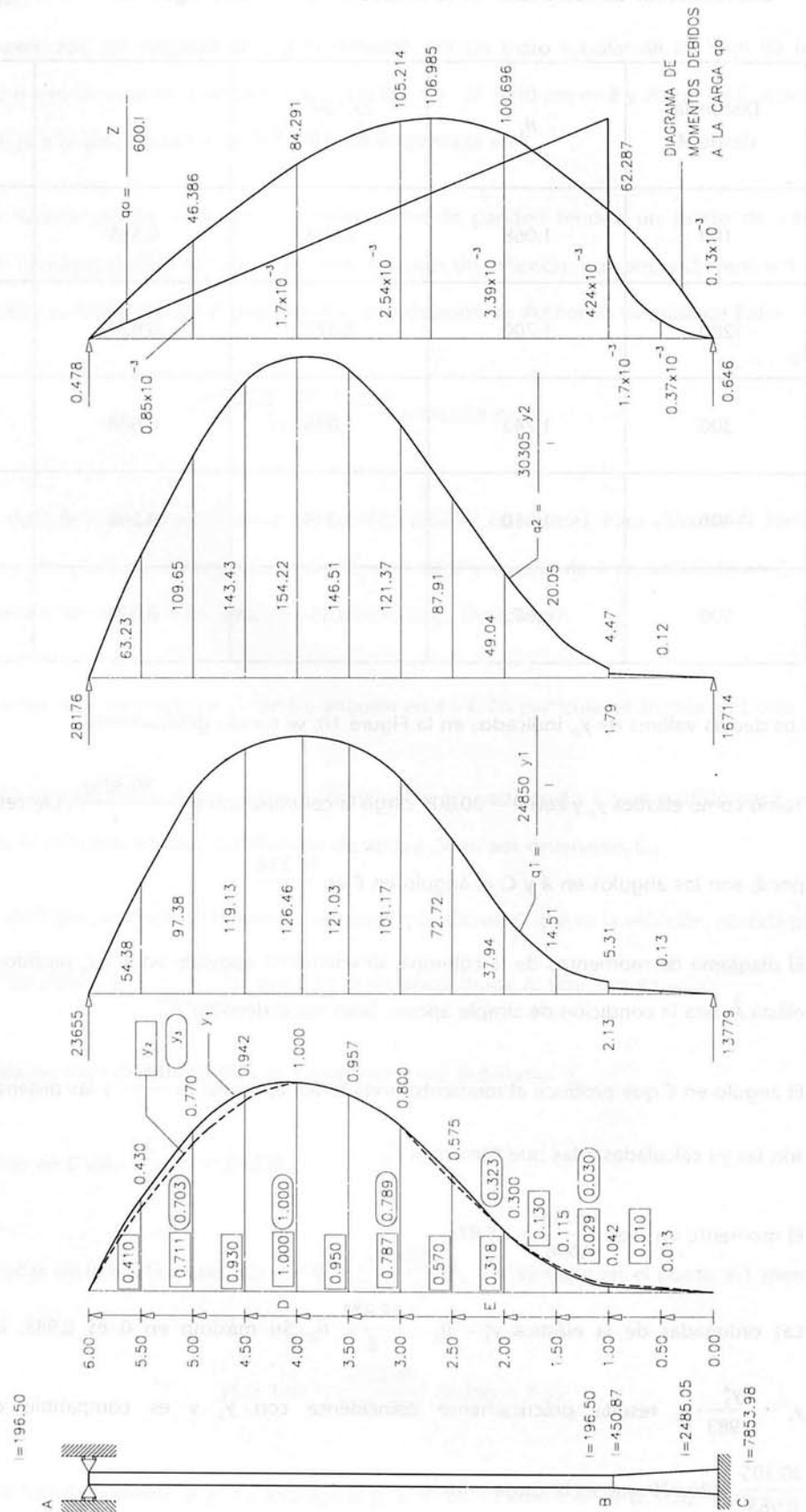


Figura 10

Distancia desde A	θ_2	$\frac{25.873}{2,05 \cdot 10^6} \theta_0$	y_3^*	y_3
100	1,276	0,585	0,691	0,703
200	2,047	1,064	0,983	1,000
300	2,104	1,328	0,776	0,789
400	1,589	1,271	0,318	0,323
500	0,815	0,786	0,029	0,030

12. Teniendo el valor de la carga crítica, admitiendo que el momento en C fuera proporcional a P (lo que no es cierto pero que, dada la pequeña variación de P para pasar de y_3^* a y_3 puede admitirse como aproximación) lo que nos daría para este momento el valor

$$\frac{25.873}{0,983} = 26.320$$

y la elástica y_3 , podemos determinar el punto de momento nulo que se produce a 3,60 de A. Al correspondiente trozo de columna, que trabaja como biarticulado, le correspondería una carga crítica (Figura 11):

$$\frac{\pi^2 \cdot 2,05 \cdot 10^6 \cdot 196,5}{3,6^2 \cdot 10^4} = 30.677$$

valor que difiere del obtenido antes, 30830, apenas en 0,5%.

OBSERVACION GENERAL

El método de aproximaciones sucesivas tiene tres virtudes que nos parecen esenciales:

- Su universalidad.
- El permitirnos «palpar» las realidades físicas analizadas en el pandeo, que, a veces, escamotea la abstracción de los planteos clásicos del problema.
- Su sencillez y relativa velocidad de ejecución. Tener en cuenta que en los ejemplos hemos extremado la convergencia, por razones didácticas, hasta extremos innecesarios desde el punto de vista técnico.

En los tres ejemplos anteriores la convergencia es inmediata, como siempre sucede si la elástica de partida está bien elegida, lo que supone, para una columna en las condiciones del modelo ideal de la Figura 2:

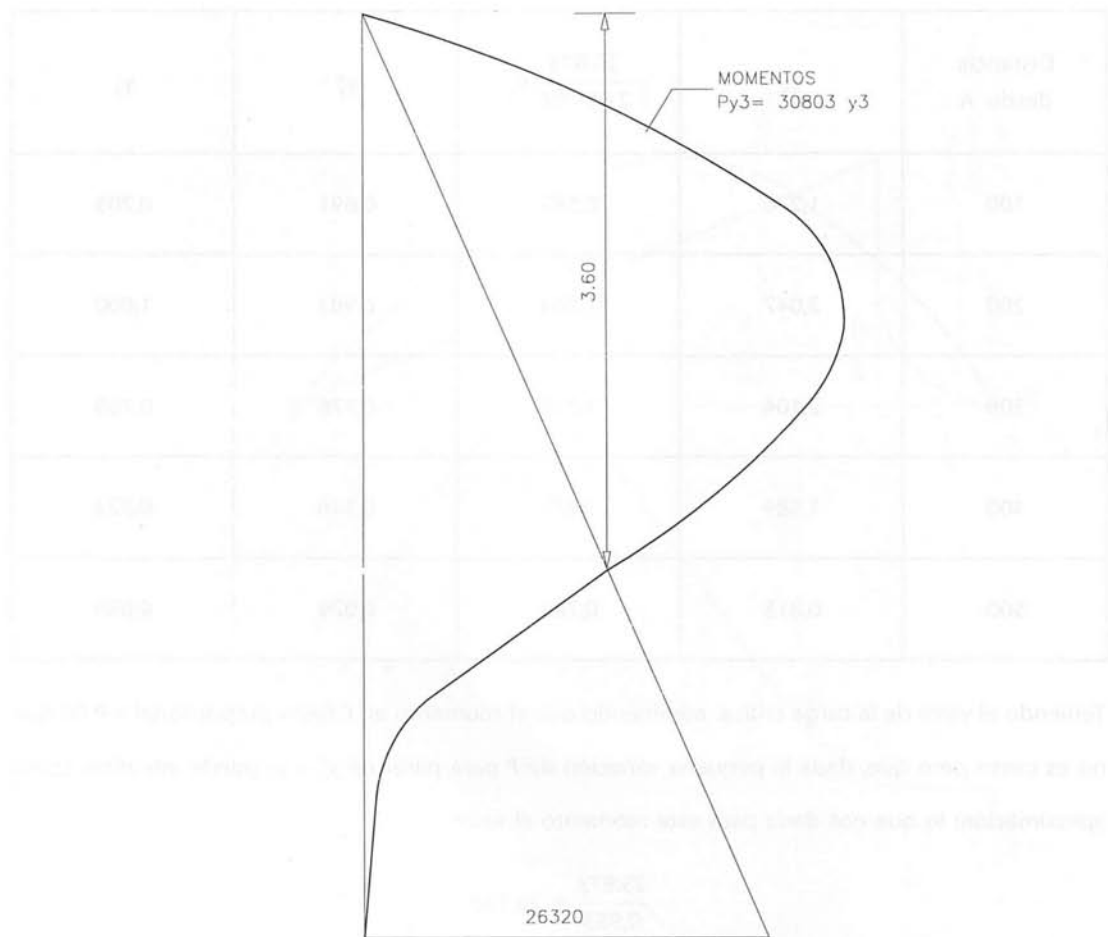


Figura 11

1. Ser una curva en el plano de la menor rigidez de la columna.
2. Tener, como la Figura 2, la concavidad siempre hacia las y negativas.
3. Variación continua de su curvatura.

Por economía de trabajo conviene, tener en cuenta que la variación de la sección transversal (incluso sus posibles discontinuidades) no supone variaciones sustanciales en la forma de la elástica (por ejemplo, posición de su punto de flecha máxima) frente a la que se tendría si la sección fuera constante.

No me ha sido posible expresar, en lenguaje matemático preciso, las condiciones que se deben cumplir, aún en el simple caso de la Figura 2, para que se produzca la rápida convergencia que muestran los ejercicios anteriores⁹.

Puede, sí, mostrarse la necesidad de esa convergencia para curvas cuya forma se aproxima mucho a las de las sucesivas elásticas obtenidas en los tanteos.

En efecto:

⁹ He planteado el problema al Ito. de Matemáticas de la Fac. de Ingeniería, que ha encarado su estudio, del que aún no se tienen resultados.

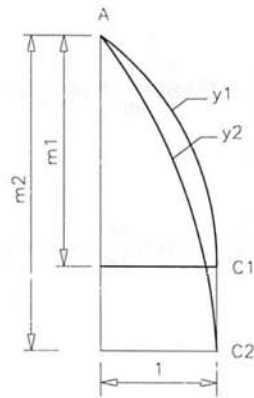


Figura 12

Consideremos dos ramas, y_1 , e y_2 , de dos elásticas con tangente vertical a las distancias m_1 y m_2 de la articulación A . Coherentemente con la mecánica de tanteos adoptada, les suponemos flecha uno en los puntos C de tangente vertical (Figura 12).

Supongamos que:

$$y_1 = a_{11} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m_1} + a_{31} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m_1} \quad (8)$$

$$y_2 = a_{12} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m_2} + a_{32} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m_2} \quad 10$$

El lector puede verificar que se cumple:

$$\left| \frac{y_1 - y_2}{y_1} \right| < \left| \frac{y_1'' - y_2''}{y_1''} \right| \quad (9)$$

bastando hacer las operaciones para

$$\frac{m^2}{2} < m_1 < m_2$$

Esta comprobación se agiliza mucho mediante las consideraciones que siguen:

Como hemos visto en los ejemplos, para curvas de partida que cumplen las tres condiciones que especificamos, las distancias m_i , de los puntos C_i de tangente vertical, a la articulación A , son prácticamente iguales. Incluso cuando elegimos mal la distancia inicial m_1 (Ejemplo 2) las siguientes m_2, m_3, \dots , prácticamente coinciden. Suponiendo que en las ecuaciones (8) $m_1 = m_2 = m$, es fácil mostrar que se cumple (9). En efecto:

Para $x = m$, $y_1 = 1$, por tanto, $a_1 - a_3 = 1$. Si para

$$x = \frac{m}{2} \quad y_1 = \alpha_1 \quad a_1 + a_3 = \alpha_1 \sqrt{2}; \quad a_1 = \frac{\alpha_1 \sqrt{2} + 1}{2} \quad a_3 = \frac{\alpha_1 \sqrt{2} - 1}{2}$$

¹⁰ El lector puede comprobar que, eligiendo adecuadamente los coeficientes a , la diferencia entre las ordenadas de una elástica cualquiera y las obtenidas con las curvas y , puede mantenerse en el orden del 2%.

Luego:

$$y_1 = \frac{1}{2} \left[(\alpha_1 \sqrt{2} + 1) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m} + (\alpha_1 \sqrt{2} - 1) \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m} \right]$$

por tanto:

$$y_1'' = -\frac{\pi^2}{8m^2} \left[(\alpha_1 \sqrt{2} + 1) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m} + 9(\alpha_1 \sqrt{2} - 1) \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m} \right]$$

Si para $x = \frac{m}{2}$, $y_2 = \alpha_2$:

$$u = \frac{y_1 - y_2}{y_1} = \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m} + \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m} \right)}{\sqrt{2}\alpha_1 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m} + \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m} \right) + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m} + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m} - \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m}} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

donde:

$$\beta = \frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2m}}{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2m}}$$

Procediendo análogamente se ve que

$$u_2 = \frac{y_1'' - y_2''}{y_1''} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - 9\beta}{1 + 9\beta}}$$

Luego:

$$v = \frac{|u_2|}{|u|} = \frac{\left| \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - 9\beta}{1 + 9\beta} \right|}{\left| \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|}$$

En la Figura 13 y para distintos valores de x hemos representado $v(\alpha_1)$.

Del análisis de las gráficas resulta (para curvas representativas de funciones como las (8), que pueden diferir muy poco de cualquier elástica posible; para los valores de x estudiados y para todos los que pueda ensayar el lector) que v es > 1 ¹¹. Por lo tanto, suponiendo que la elástica real fuera también de la forma 8 y considerando una curva cualquiera representativa de una función de la forma 8, el error cometido en las ordenadas es menor que el cometido en su derivada segunda. Pero:

$$\text{error de } y_{n+1}'' = \text{error de } y_n$$

$$\text{error de } y_{n+1}'' > \text{error de } y_{n+1}, \text{ por tanto}$$

$$\text{error de } y_{n+1} < \text{error de } y_n, \text{ por tanto}$$

¹¹ Para $x \rightarrow m$ $\beta \rightarrow -1$ y el numerador de $v \rightarrow \infty$, por tanto, para todo x tendiendo a m $v \gg 1$.

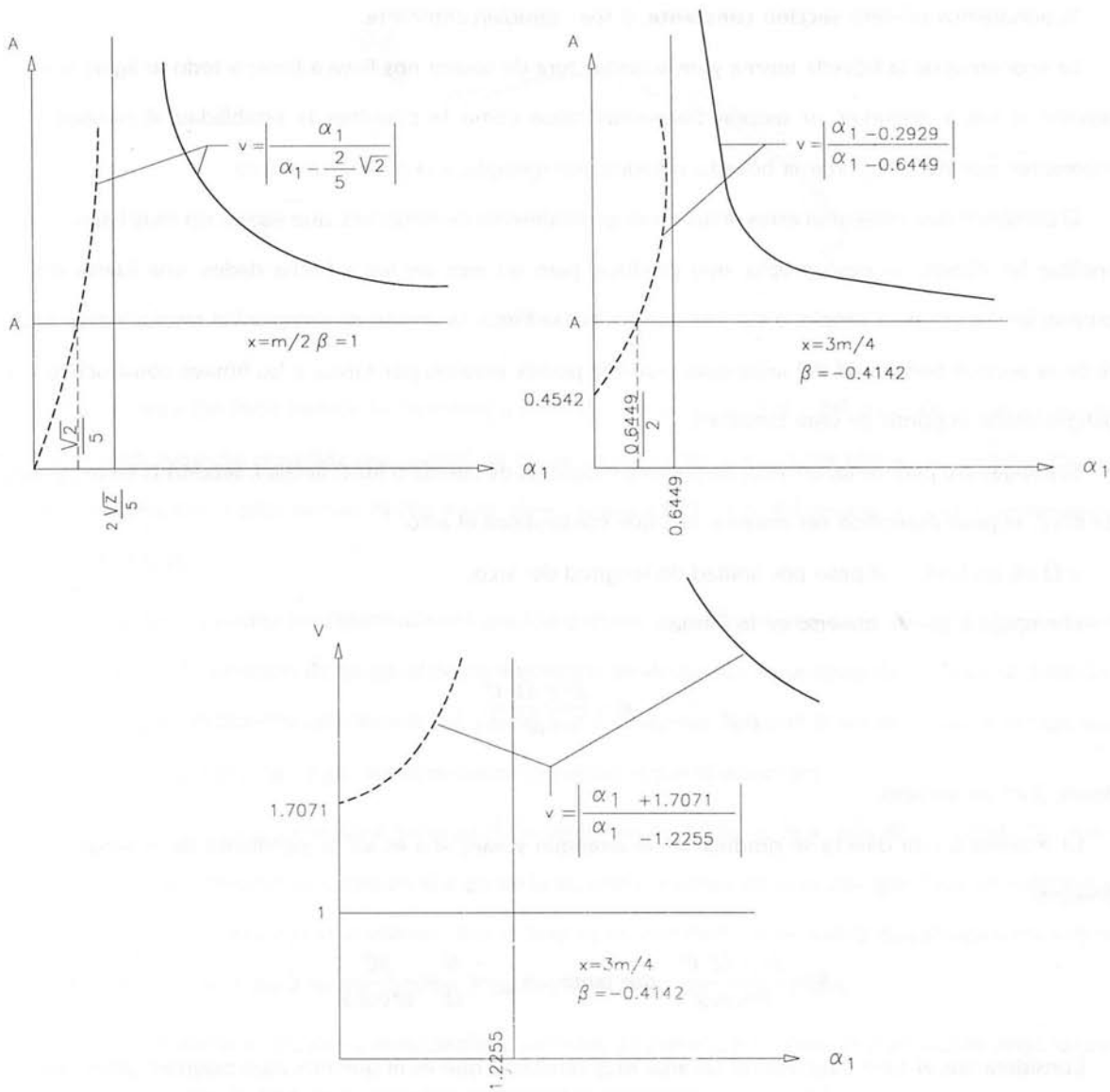


Figura 13

con las limitaciones arriba expresadas, tiene que haber convergencia para curvas representativas de funciones del tipo de las (8), usando el procedimiento de aproximaciones sucesivas de los ejercicios anteriores.

Sólo me resta agregar que se (y además lo comprendo muy bien) que en general se considerará innecesario analizar las razones de una convergencia que la práctica de trabajo muestra, de manera podríamos decir experimental, que se produce.

CARGA CRÍTICA DE ARCOS DE DIRECTRIZ CATENARIA CARGADOS CON SU PESO PROPIO

La determinación de esta carga crítica es el problema primero y principal del cálculo de arcos de directriz catenaria, muy usados en cubiertas de gran luz; la experiencia de cálculo prueba, en efecto, que una adecuada seguridad al pandeo supone una estructura que se comportará bien frente a sollicitaciones distintas del peso propio.

Supondremos primero **sección constante**, o sea I también constante.

La economía de la bóveda misma y de su estructura de sostén nos lleva a hacerla todo lo ligera que sea posible, o sea a disminuir su sección transversal tanto como lo permitan la estabilidad al pandeo y los momentos que deba soportar la bóveda, debidos, por ejemplo, a la nieve o al viento.

El problema que presentan estos arcos no es generalmente de tensiones, que suelen ser muy bajas. Es fácil analizar las debidas al peso propio, que produce, para un arco de luz y flecha dados, una fuerza directa proporcional a ese peso propio, o sea a la sección; por lo tanto, la tensión de compresión resulta independiente de la sección transversal del arco; cuya esbeltez podría llevarse, por tanto, a los límites constructivos, sin peligro desde el punto de vista tensional.

Supongamos, para verlo, un arco, de directriz catenaria, de cuerda o luz C , flecha f , sección Ω en m^2 , y sea ρ en K/m^3 , el peso específico del material con que construimos el arco.

$\rho \cdot \Omega$ es, en $K/m \cdot \tau$, el peso por unidad de longitud del arco.

El empuje H puede ponerse en la forma

$$H = \frac{\beta \cdot \rho \cdot \Omega \cdot C^2}{8f}$$

donde β es un número.

La máxima fuerza directa se produce en el arranque y vale, si α es allí la pendiente de la tangente a la directriz:

$$N = \frac{\beta \cdot \rho \cdot \Omega \cdot C^2}{8f \cos \alpha} \quad \text{por tanto} \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{N}{\Omega} = \frac{\beta C^2}{8f \cos \alpha} \cdot \rho \cdot C$$

Consideramos el caso concreto de un arco muy rebajado, que es el que nos dará mayores tensiones:

Sea, para fijar ideas, $\frac{C}{f} = 10$, lo que da: $\frac{1}{\cos \alpha} \sim 1,08$.

Para arcos rebajados como el que consideremos $\beta \sim 1$, por tanto:

$$\sigma_{\text{máx}} = 1,08 \cdot 1,25 \cdot \rho \cdot C = 1,35 \rho \cdot C$$

Suponiendo

$$\rho = 2.000 \text{ K/m}^3 \quad \text{y} \quad C = 100 \text{ m}$$

$\sigma_{\text{máx}} = 270.000 \text{ K/m}^2 = 27 \text{ K/cm}^2$ que es una tensión pequeña para los materiales generalmente usados.

Lo que antecede nos muestra claramente cómo lo determinante, en el dimensionado de estos arcos, será la resistencia a las flexiones, coexistiendo con la fuerza directa.

Consideremos un arco, de directriz catenaria (Figura 14) biarticulado, de sección constante, cargado con su peso propio. En condiciones ideales (análogas a las establecidas para la columna biarticulada de la Figura 2), la línea de presiones coincide con la directriz, luego todas las secciones resultan trabajando a compresión simple.

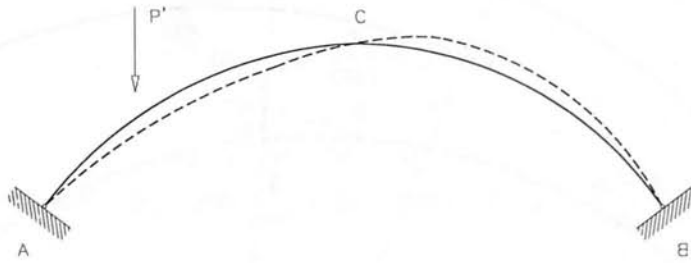


Figura 14

Podemos aquí también realizar la experiencia ideal de aumentar la carga del arco, de manera que sea siempre uniformemente repartida por unidad de desarrollo, y, si las condiciones ideales se cumplieran y si, además, suponemos, como hemos hecho hasta ahora, despreciables las deformaciones por compresión el arco no pandearía.

Si tomáramos en cuenta las deformaciones por compresión, la configuración de equilibrio no sería ya una catenaria, porque la variación de longitud de los elementos de desarrollo no se ajustaría a lo que se deduciría de la expresión de la directriz catenaria inicial, con lo que aparecerían flexiones al entrar el arco en carga, que aumentarían al aumentar la carga, uniformemente repartida según el desarrollo.

Es esta, observación que conviene hacer pero sin seguir analizándola, ya que, aún despreciando las deformaciones por compresión, hay, como en el caso de la columna, muchas otras causas que hacen irrealizable el caso ideal, y cuya influencia perturbadora sobre el arco es mucho más fuerte que la que pueda derivarse de las modificaciones de la línea media debidas a las deformaciones por compresión.

Como en el caso de la columna, para clarificar las ideas, es preferible suponer que las condiciones ideales se cumplen, y apartar el arco de su posición de equilibrio mediante una fuerza P' .

Retiramos P' . Decimos que el arco patea, cuando, al retirar P' no retoma su configuración inicial de equilibrio, o sea cuando existe una nueva configuración de equilibrio, y de equilibrio estable, compatible con el arco deformado.

Para proseguir nuestro estudio necesitamos obtener la relación que vincule la deformación del arco a la sollicitación; concretamente, al momento aplicado, cuyo efecto es el determinante y el único que consideraremos.

Sea AB , Figura 15, un trozo de arco que puede flexar o patear en el plano del dibujo, que es, además, plano de simetría de la sección transversal del arco. x es la abscisa curvilínea que define la posición del elemento genérico MN , de longitud inicial $\rho_0 \cdot d\theta = dx$. Por hipótesis el arranque, punto A de las Figuras 14 y 15 es común a las configuraciones inicial y final del arco.

MC y NC son las normales en M y N al arco AB . Sea $M''N''$ la posición final del elemento MN .

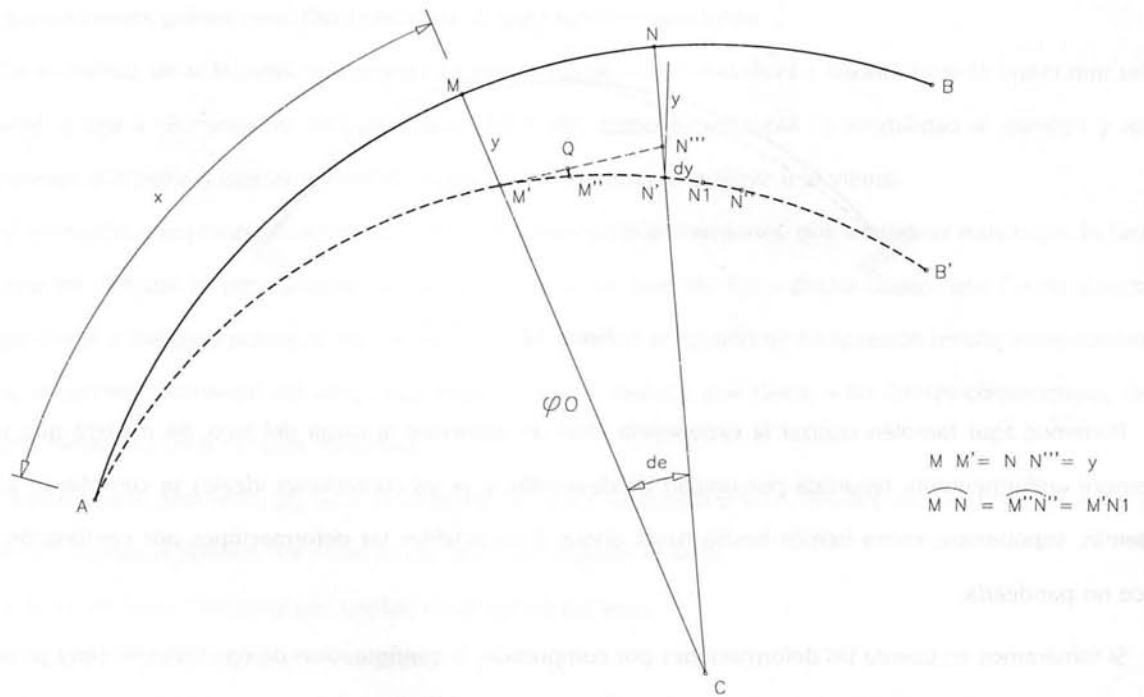


Figura 15

Si M' es la intersección de la elástica AB' con MC , sabemos que $M'M''$ es pequeño frente a $MM' = y$, del orden de dy ¹².

Si sobre AB' , tomamos N_1 , tal que $\widehat{M'N_1} = \widehat{M'N''}$ ($=\widehat{MN}$ al considerar sólo deformaciones por flexión), la curvatura del elemento $M'N''$ difiere poco de la del elemento $M'N_1$. Las supondremos iguales.

Por otra parte podemos también, con error del orden de dy , suponer que N_1 coincida con N' , intersección de NC con AB' .

Llamamos ordenada de la elástica a $MM' = y$.

Si ρ , es el radio de curvatura del elemento MN después de la deformación:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{dx + \Delta dx}$$

¹² En efecto, si Q es la intersección de la paralela a MC por M'' con MN'' , e indicando con el signo \sim que los valores que él separa son del mismo orden:

$$\frac{M'M''}{x} \sim \frac{M''Q}{y}$$

$$\frac{M''Q}{dy} \sim \frac{y}{x}$$

por tanto

$$M'M'' \sim \frac{x}{y} \frac{y}{x} dy$$

por tanto

$$M'M'' \sim dy$$

Sea $N''N = MM' = y$; $M'N'' = (\rho_0 - y) d\theta$; $\sphericalangle N''M'N' = \gamma$

$$\operatorname{tg} \gamma = y'; \quad \frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + y'^2}$$

por tanto,

$$dx + \Delta dx \sim M'N' = (\rho_0 - y) d\theta \frac{1}{\cos \gamma} = (\rho_0 - y) d\theta \cdot \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\rho_0 - y}{\rho_0} dx \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

El ángulo girado por la sección M , cuando pasa de M a M' es γ , cuya tangente es dy/dx ; la tangente del ángulo girado por la sección N al pasar de N a N' será:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$$

Luego:

$$\Delta d\theta = \operatorname{tg} \Delta d\theta = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx - \frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx\right) \frac{dy}{dx}}$$

$$d\Delta + \Delta d\theta = d\theta + \frac{\frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx}{1 + y'^2}$$

Luego:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{\frac{\rho_0 - y}{\rho_0} dx \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y}$$

La variación de curvatura cuando pasamos de MN a $M'N'$ será:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{(\rho_0 - y)\sqrt{1 + y'^2}} - 1 \right) + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_0 - y} = \frac{\rho_0(1 - \sqrt{1 + y'^2}) + y\sqrt{1 + y'^2}}{\rho_0(\rho_0 - y)\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y}$$

En nuestro caso podremos poner con gran aproximación:

$$\rho_0 \sim \rho_0 - y, \quad \text{por tanto,} \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\rho_0(1 - \sqrt{1 + y'^2}) + y\sqrt{1 + y'^2}}{\rho_0^2 \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

En el caso de que AB fuera inicialmente una recta, se obtiene la expresión conocida:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Si las deformaciones son muy pequeñas $y' \sim 0$, por tanto:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{y}{\rho_0^2} + \frac{d^2y}{dx^2}$$

Probaremos ahora que la variación de la curvatura vale $-\frac{M}{EI}$ si aceptamos la aproximación

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta}$$

consecuencia de considerar constante la longitud del elemento, o sea sólo deformaciones por flexión.

En efecto: Consideremos un trozo de arco (Figura 16) de longitud inicial $\rho_0 d\theta$, sometido a flexión pura de momento M , actuando en el plano de la figura, que es plano principal de la sección del arco. La deformación debida a M , lleva la curvatura inicial $1/\rho_0$ a la final $1/\rho$.

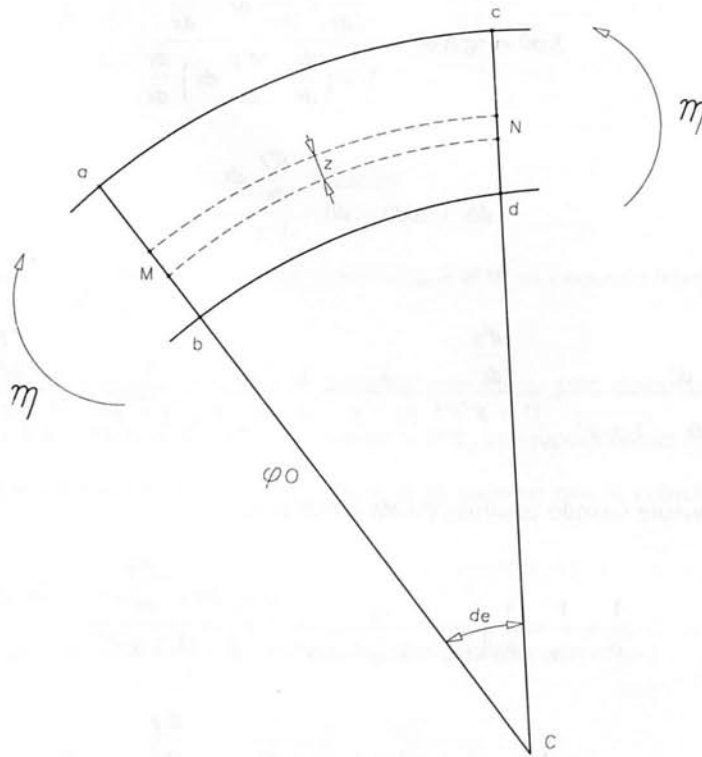


Figura 16

Admitiendo que las secciones planas, antes de la flexión, se mantengan planas después de ésta (hipótesis suficientemente exacta, aún para barras fuertemente curvadas, que no es el caso de los arcos que son barras débilmente curvas), se tiene:

Deformación por unidad de longitud, de las fibras a la distancia z de la fibra baricentral MN , cuya longitud inicial es $(\rho_0 - z) d\theta$:

$$\varepsilon = \frac{z \cdot \Delta d\theta}{(\rho_0 - z) d\theta}, \text{ por tanto, } \sigma_z = \frac{E \cdot z \cdot \Delta d\theta}{(\rho_0 - z) d\theta}$$

Suponiendo nulas las tensiones longitudinales entre las fibras, lo que es, en el caso de flexión pura, suficientemente aproximado aún para barras fuertemente curvadas (que no es nuestro caso):

$$dM = \sigma_z \cdot z \cdot dA, \text{ donde } dA \text{ es el elemento de área de la sección transversal.}$$

Luego:

$$|M| = E \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \int_A \frac{z^2 dA}{\rho_0 - z}$$

En los casos que interesan $\rho_0 - z \sim \rho_0$, por tanto,

$$|M| = E \frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta} \int_A z^2 dA = EI \frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta}$$

$\frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta}$, es la variación de la curvatura si suponemos invariable la longitud del elemento MN . Por otra parte, si consideramos positivo, el signo del momento que aparece en la Figura 11,

$$\frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta} \simeq \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{M}{EI}$$

La ecuación característica de la elástica del arco será:

$$\frac{\rho_0(1 - \sqrt{1 + y'^2}) + y\sqrt{1 + y'^2}}{\rho_0^2 \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI}$$

que si $y' \sim 0$ toma la forma:

$$\frac{y}{\rho_0^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ ecuación obtenida por Bousinesq.}$$

Adoptar la primera de estas dos últimas ecuaciones, equivale a considerar la expresión completa de la curvatura en el estudio del pandeo de una columna; adoptar la segunda, equivale a hacer una hipótesis equivalente a la de Euler.

Los resultados obtenidos, usando la última ecuación, son exactos desde el punto de vista de la obtención de la carga crítica. Haremos entonces, en lo que sigue, la hipótesis de que y es muy pequeña frente a τ , y que $y' \sim 0$.

Consideremos el arco (Figura 17), de directriz catenaria, pandeando según la elástica dibujada con trazos. $2 \cdot \tau$ es el desarrollo del arco ACB .

Sea S una sección genérica del arco, para la que y es la ordenada de la elástica, medida según la norma a la directriz. Supondremos y muy pequeña frente a τ ; por consiguiente la «macrogeometría» del arco y con ella su línea de presiones, no cambian; por lo tanto, esta línea de presiones sigue coincidiendo con la directriz del arco no pandeado. Si el valor de la fuerza directa en S , es N , el momento genérico valdrá, de acuerdo a las ya establecidas convenciones de signo, $+Ny$.

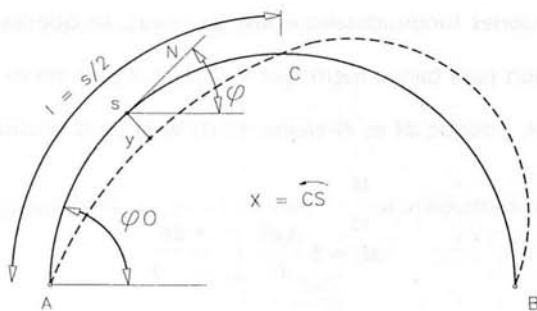


Figura 17

Si ρ_c es el radio de curvatura en la clave, y q la carga por unidad de desarrollo del arco:

$$H = \rho_c \cdot q$$

En la catenaria: $N \cos \varphi = H$, por tanto, $N = \frac{\rho_c}{\cos \varphi} \cdot q$

$$x = \overline{CS} = \rho_c \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\frac{x^2 + \rho_c^2}{\rho_c^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \text{ por tanto, } \frac{\rho_c}{\cos \varphi} = \sqrt{x^2 + \rho_c^2}, \text{ por tanto, } N = q \sqrt{x^2 + \rho_c^2}$$

El radio de curvatura, genérico, de la directriz es:

$$\rho_o = \frac{\rho_c}{\cos^2 \varphi} = \frac{x^2 + \rho_c^2}{\rho_c}$$

por tanto, en valor y signo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{EI} \cdot y \sqrt{x^2 + \rho_c^2} - \frac{\rho_c^2 \cdot y}{(x^2 + \rho_c^2)^2} \tag{6}$$

Sea $\gamma = \frac{1}{\text{tg } \varphi_o}$ $\rho_c = \gamma \cdot \tau$, $v = \overline{AS}$, por tanto, $x = \tau - v$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = -\frac{q}{EI} \cdot y \sqrt{\gamma^2 \tau^2 + (\tau - v)^2} - \frac{\gamma^2 \cdot \tau^2 \cdot y}{[\gamma^2 \cdot \tau^2 + (\tau - v)^2]^2}$$

y si, finalmente, $u = \frac{v}{\tau}$, la ecuación anterior se escribe en la forma:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -\frac{q\tau^3}{EI} \cdot y \sqrt{\gamma^2 + (1 - u)^2} - \frac{\gamma^2 \cdot \tau^4 \cdot y}{\tau^4[\gamma^2 + (1 - u)^2]^2}$$

que ponemos en la forma:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -\chi \cdot y \sqrt{\gamma^2 + (1 - u)^2} - \frac{\gamma^2 y}{[\gamma^2 + (1 - u)^2]^2} \tag{6'}$$

con u variando de 0 a 2 y $\chi = \frac{q\tau^3}{EI}$.

Nuestro problema será, para cada γ (que, dado τ , nos define la directriz), calcular χ ; conociendo χ la carga crítica será:

$$q = \chi \frac{EI}{\tau^3}$$

Para calcular χ , empecemos, por simple comodidad de dibujo, por rectificar el arco ACB (Figura 18).

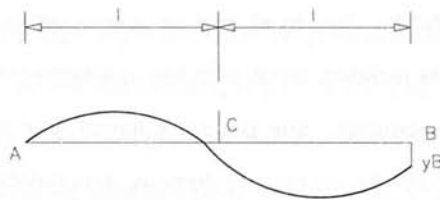


Figura 18

El único medio de integrar la ecuación diferencial de la elástica es por computación. Para hacerlo elegimos γ ; con lo que queda definida la directriz.

Para cada valor que elijamos para χ , llegaremos para $u = 2$, a una ordenada y_B (en general distinta de 0), con lo que podemos establecer una correspondencia biunívoca entre y_B y χ , definiendo la función $y_B(\chi)$. Calculamos las raíces de esta función, y, para cada una de estas raíces, dibujamos la elástica correspondiente.

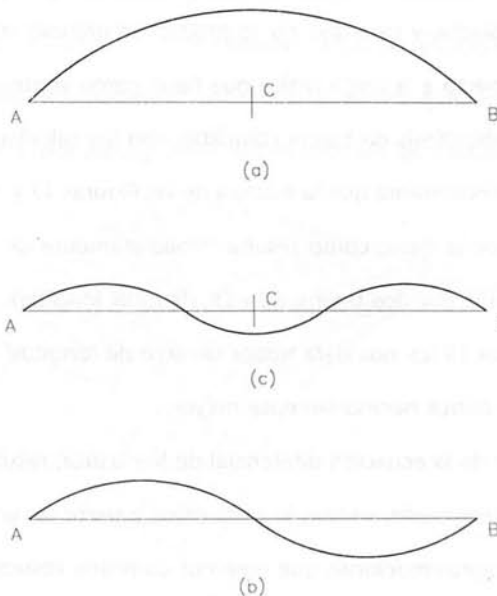


Figura 19

Para las tres primeras raíces, las elásticas tienen las formas que aparecen dibujadas en la Figura 19 (a), (b), (c). La Figura 19 (a) corresponde a la menor de estas raíces, no es, mecánicamente, solución del problema. Supondría que todas las y serían positivas o negativas, lo que no es posible sin un alargamiento o un acortamiento del arco, lo que es incompatible con el hecho de que el pandeo es una deformación por flexión, que no modifica el desarrollo del arco. La deformación por compresión, debida a la fuerza directa, es independiente del pandeo y previa a él.

La Figura 19 (b) corresponde a la elástica que aparece esquemáticamente dibujada en la Figura 17, y el χ correspondiente es el buscado, ya que es el menor de los que, siendo raíces de la función $y_B(\chi)$, son mecánicamente posibles.

La elástica 19 (c) es, en principio, posible, pero, podríamos decir, infinitamente improbable. Para un χ , o sea para una carga q , mucho menor, el correspondiente a la elástica 19 (b), ya es posible una elástica de pandeo, y es ésta la que se produciría cuando el arco se aparte de su posición de equilibrio inicial por cualquiera de los motivos que, en la realidad, producirán ese apartamiento.

La hipótesis de que las y son pequeñas, que podemos llamar, por analogía, «hipótesis de Euler», nos conduce a una solución que, como en el caso de las columnas, deja indeterminada la flecha de la elástica, lo que es mecánicamente ilógico y contrario a la experiencia.

Nuestra solución nos dice que existen elásticas de pandeo sólo para los valores de χ , raíces de la función $y_B(\chi)$; o sea que el arco pandearía para el valor de χ correspondiente a la elástica 19 (b) pero no para un valor entre éste y el correspondiente a la elástica 19 (c), lo que también es absurdo y contrario a la experiencia.

Podríamos hacer aquí consideraciones y desarrollos análogos a los hechos para las columnas, incluso resolver la correspondiente ecuación diferencial de la elástica en la hipótesis $y' \neq 0$, pero no lo creemos necesario ya que no agregarían nada, conceptualmente, a lo dicho entonces. Por otra parte, en los problemas reales, coexisten siempre flexiones con la fuerza directa, y para que no se produzcan grandes deformaciones, debemos usar un coeficiente de seguridad con respecto a la carga crítica que hace, como vimos en el caso de las columnas, que los momentos calculados en la «hipótesis de Euler» coincidan con los calculados exactamente ¹³.

Nos parece importante ver directamente que la elástica de las Figuras 17 y 19 (b) es la más desfavorable de las posibles. Esta elástica pasa por la clave, como resulta inmediatamente de la simetría, respecto a C , de su ecuación diferencial, y está formada por dos trozos, AC y CB , de igual longitud, τ . Toda elástica, de más de dos ramas, por ejemplo la de la Figura 19 (c), nos dará trozos de arco de longitud menor que τ , más rígidos, para los que obtendremos una carga crítica necesariamente mayor.

Decíamos que, de la simetría de la ecuación diferencial de la elástica, resulta que esta elástica pasa por la clave C . Este resultado es sólo aproximado, ya que lo obtuvimos a partir de una ecuación diferencial a la que llegamos luego de una serie de aproximaciones que creemos conviene resumir. Supusimos:

1. (Figura 15) que la curvatura $1/\rho$ del elemento $M''N''$ es igual a la del elemento $M'N'$. Es esta la aproximación de la que puede derivarse un error mayor.
2. $\rho_0 \sim \rho_0 - y$, aproximación que no introduce error, ya que podemos suponer y tan pequeño como queramos.
3. y' despreciable, aproximación de la misma naturaleza que la anterior.

¹³ (Aunque sean mayores que los directamente aplicados. Ver «Resumen de lo obtenido», pág. 25 y «Coexistencia en arcos de fuerza directa con flexión», pág. 59.)

4. (Figura 16) que $\rho_0 \sim \rho_0 - z$.
5. Que al pandear el arco, **NB** no varía y el cortante es despreciable, lo que es tan exacto como queramos ya que podemos hacer la ordenada, y , arbitrariamente pequeña.

Es fácil ver, sin embargo, que la elástica no puede pasar por **C**:

1. Geométricamente: La simple inspección de la Figura 17 nos muestra que, si la elástica pasa por **C**, el punto **C** del arco, antes del pandeo, tiene que estar, después del pandeo, a la derecha y por encima de **C**. Pero, si esto sucede, la ecuación diferencial no es simétrica; por lo tanto, la elástica no pasa por **C**.
2. Energéticamente: Si la elástica pasa por **C**, y teniendo en cuenta la simetría de su ecuación diferencial, serán iguales las ordenadas de los puntos simétricos respecto a **C**, por tanto no habría la variación de energía potencial de posición, necesaria para suministrar la energía potencial de deformación del arco pandeado, por tanto, la elástica no puede pasar por **C**.

Luego el resultado, muy importante, de que la elástica pasa por **C**, es, como decíamos, sólo aproximado, pero con una aproximación ciertamente muy grande si las y son muy pequeñas frente a τ .

En caso de que la sección longitudinal de una cubierta sea ondulada de un máximo en la clave a cero contra los elementos resistentes de borde (Figura 20)¹⁴, de modo que todas las secciones transversales sean catenarias con arranques paralelos en un plano horizontal y flechas variables, determinamos su carga crítica usando la ecuación (6) en la que I es ahora función de x . Para calcular I , en cada una de las secciones en que dividimos el arco para integrar numéricamente la ecuación 6, definimos la amplitud de la ondulación de clave con lo que resultan definidas las amplitudes y , por consiguiente, los momentos de inercia en todas las otras secciones¹⁵.

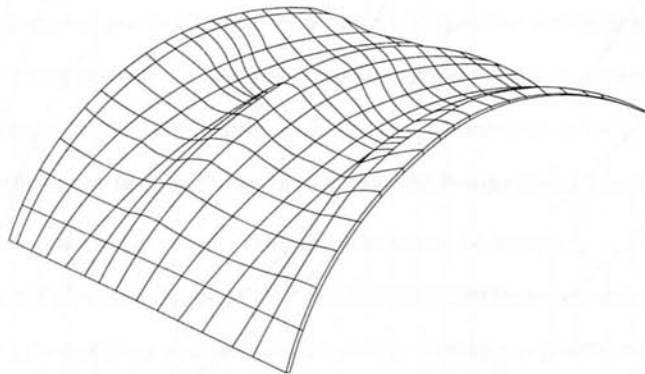


Figura 20

¹⁴ De acuerdo a la forma estructural descrita en el artículo de «Formas» ya citado.

¹⁵ Para I usamos la expresión muy aproximada, si a es pequeño frente a τ (en la práctica ha sido siempre $a < \tau/10$)

$$I = \frac{\tau a^2}{8} + I_{\text{propio}} \text{ en que:}$$

τ = ancho de la onda.

a = amplitud de la ondulación de clave.

e = espesor equivalente; igual al espesor si la lámina es maciza, e igual al espesor de igual área, si la lámina se construye con piezas huecas.

I_{propio} es la suma de los momentos de inercia de los distintos elementos en que dividimos la onda. Si la bóveda es maciza:

$I_{\text{propio}} \sim \frac{eh^3}{12}$; si la sección longitudinal tiene huecos el significado de I_{propio} es obvio.

Repetido el proceso de integración previamente explicado, representamos sus resultados en la familia de curvas de la Figura 21, que nos dan χ para cada γ y para cada relación

$$v = \frac{l_{\text{clave}}}{l_{\text{arranque}}}$$

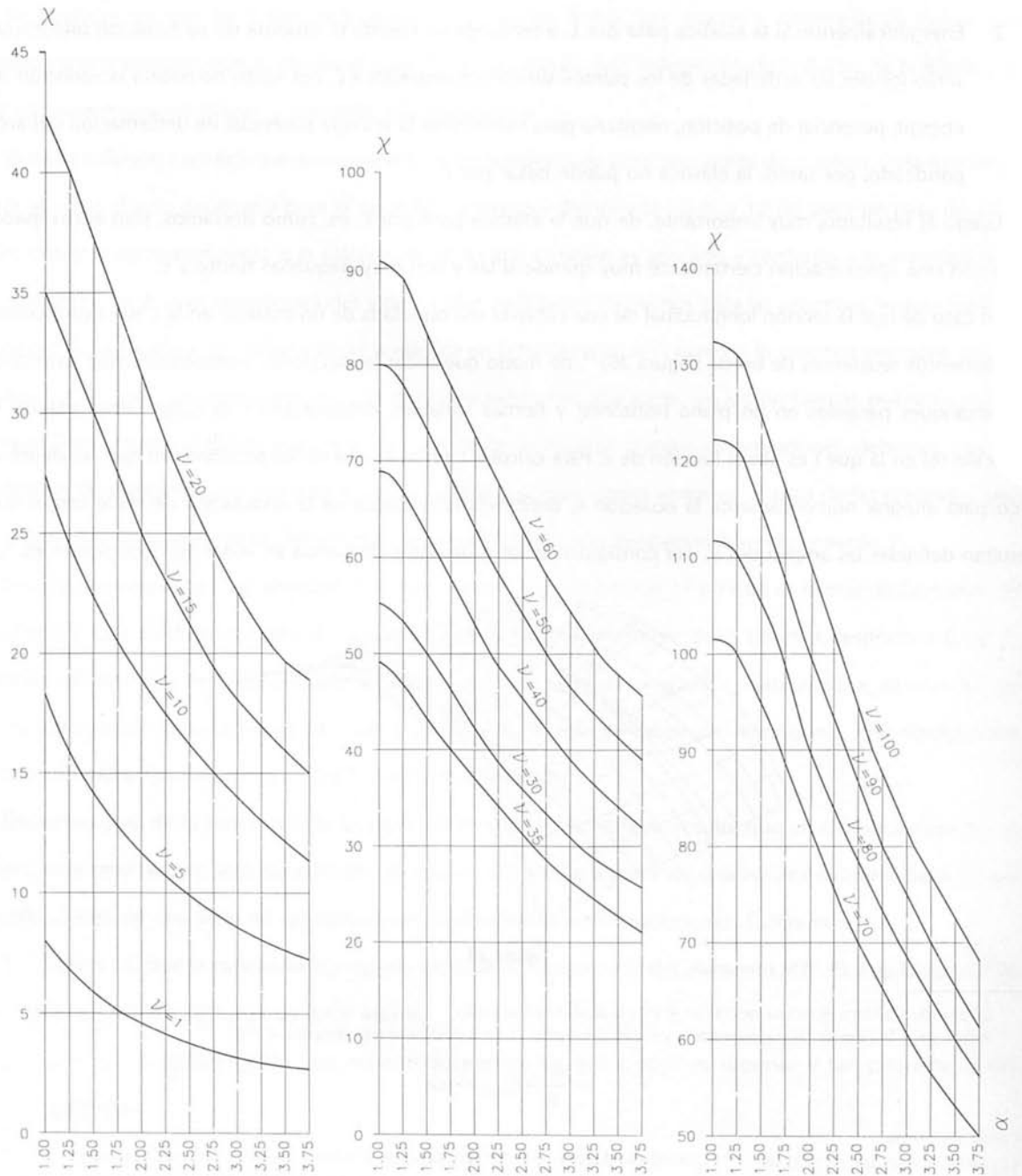
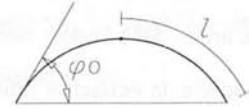


Figura 21

Para facilitar la lectura hacemos tres familias de curvas representadas con distintas escalas; una para ν entre 1 y 20, otra para ν entre 30 y 50 y otra entre 60 y 100.

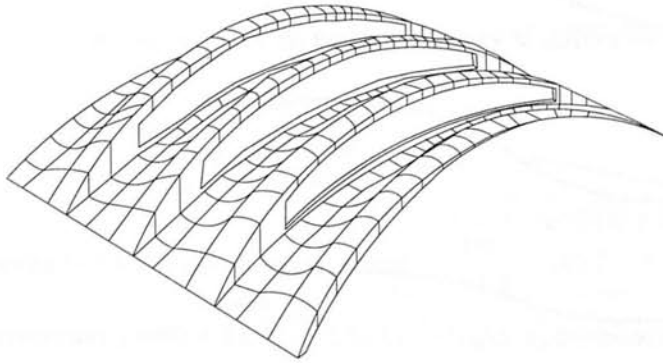


Figura 22

En el caso de que la cubierta se resuelva con una bóveda «ondulada discontinua» con lucernarios¹⁶, como las que se muestran en las ilustraciones iniciales y en la Figura 22, se produce una discontinuidad donde terminan los lucernarios y no es posible, como en el caso anterior, sistematizar el estudio de la estabilidad elástica de la cubierta mediante la resolución de la ecuación diferencial (6), de modo de obtener una serie de curvas de las que pudiéramos sacar el valor χ que nos diera la carga crítica, porque la configuración de pandeo no es cilíndrica, ν , además, puede variar mucho la entidad de la parte ciega que vincula dos bóvedas sucesivas.

En la Figura 23 mostramos una vista de una de estas estructuras y las secciones longitudinales de la bóveda: por la clave, 7, la genérica por la zona del lucernario, a la que son análogas las 4, 5 y 6, la genérica por la zona en que se unen las dos bóvedas, a la que son análogas las 2 y 3 y la de arranque 1.

El cálculo teórico y la experiencia, demuestran que puede determinarse la carga crítica con aproximación suficiente (superior a aquella con que conocemos el real valor de E) suponiendo sección constante ($\nu = 1$) con el gráfico de la Figura 21, y usando un valor medio del momento de inercia $I_m = \sqrt[7]{I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_7}$.

En el caso anterior de sección variable pero con «ondulación continua», es obvio que la configuración de pandeo será también un cilindro cuya sección por un plano transversal puede representarse esquemáticamente con la Figura 14.

Deliberadamente hemos elegido siete divisiones de las cuales la tercera cae en las proximidades de la discontinuidad. Para tenerla en cuenta tomamos el promedio de dos valores de I , uno a la izquierda, el máximo de la discontinuidad, y otro a la derecha, a igual distancia que el máximo de la discontinuidad del punto correspondiente a la tercera división. El I_{promedio} correspondiente es $22,15 \cdot 10^{-3}$

$$I_{\text{medio}} = \sqrt[7]{I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_7} = \sqrt[7]{7 \cdot 18,5 \cdot 22,15 \cdot 28,3 \cdot 37,2 \cdot 42 \cdot 44,4 \cdot 10^{-3}} = 0,02471$$

¹⁶ Ver el artículo citado de «Formas».

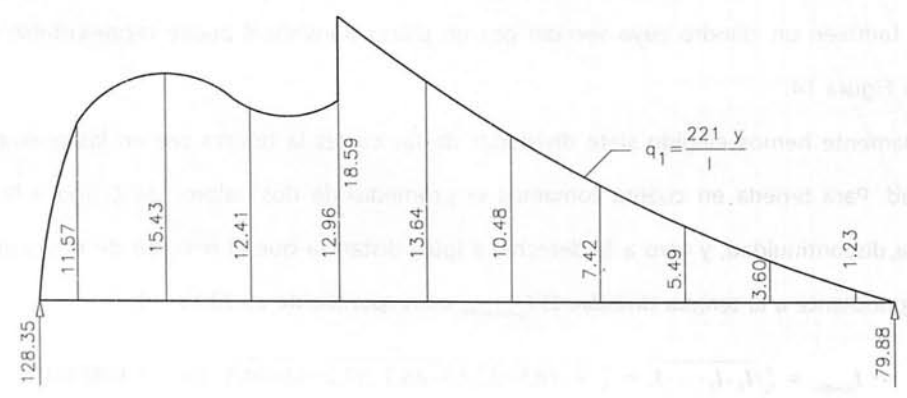
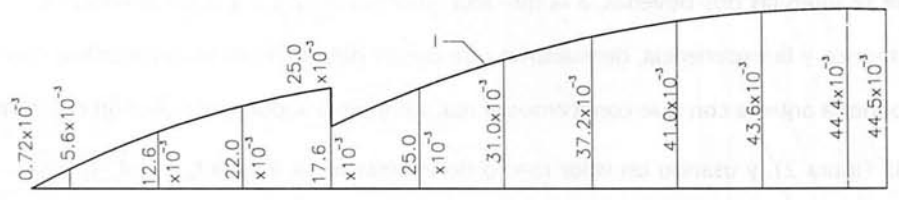
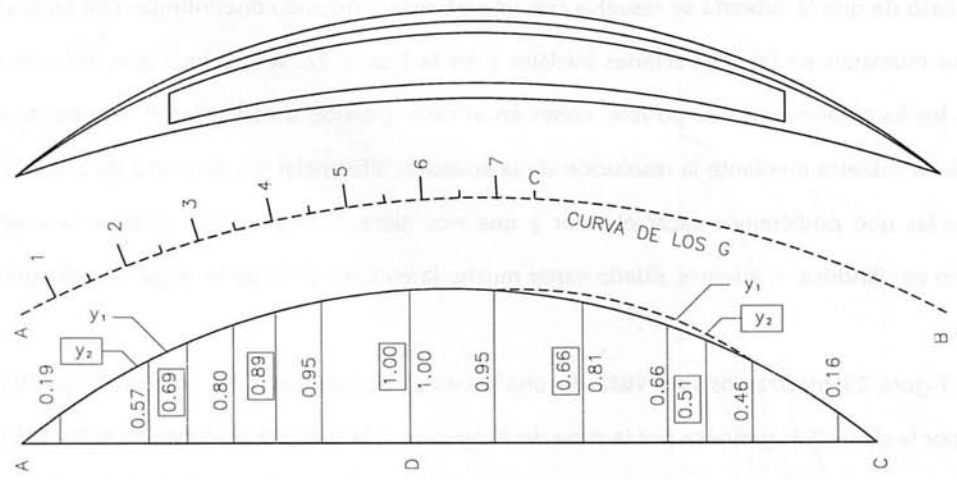
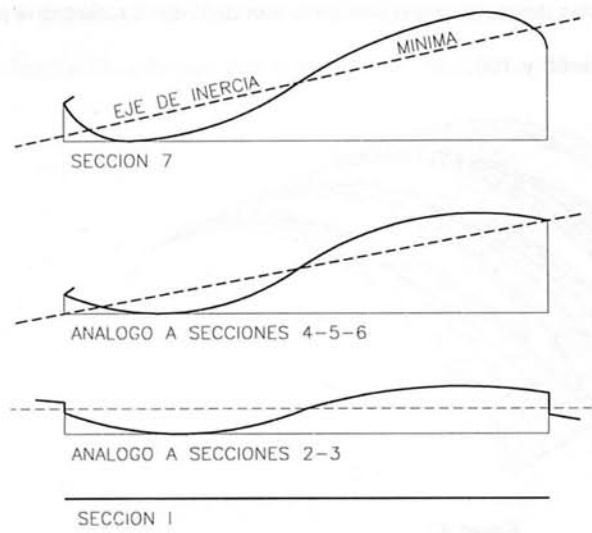


Figura 23

Luego:

$$N_{partida} = \frac{\pi^2 \cdot 10^5 \cdot 0,02471}{22,37^2} \simeq 341 \text{ T}$$

El máximo se produce en D , en el mismo punto de flecha máxima de la elástica de partida y vale $663,5 \cdot 10^3$.

Luego

$$f = \frac{663,5 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^5} = 0,9478$$

Luego para tener una flecha l en D precisaríamos una fuerza $= \frac{341}{0,9478} = 360 \text{ T}$.

Determinando los momentos punto a punto resulta una elástica y_2 prácticamente coincidente con y_1 .

Luego: $N_{critica} = 360 \text{ T}$. El coeficiente de seguridad es $\simeq \frac{360}{46,85} = 7,7$ que es mayor de lo necesario.

Podría disminuirse la rigidez (o sea las pendientes y curvaturas) lo que es económicamente ventajoso.

unidades T.m. $\tau = 22,37$

$$N_{real} \begin{cases} \text{arranque } 50,24 \\ \text{riñón } 46,20 \\ \text{clave } 44,74 \end{cases}$$

$$N_{medio} = 46,85$$

Si la bóveda es discontinua la configuración de pandeo ya no será cilíndrica. Hemos hecho, sin embargo, la hipótesis, que los controles experimentales demostraron correcta, de que cada sección se deformará girando con respecto a su eje baricéntrico de momento de inercia mínimo, deformándose el conjunto como si fuera un cilindro con los momentos de inercia así obtenidos.

Esta hipótesis supone despreciar la rigidez torsional de la lámina y ha sido comprobada, reiteradamente, calculando con ella las deformaciones en varios puntos de la sección transversal que contiene la flecha media de la cubierta (con lo que eliminamos la incertidumbre respecto a E) y midiéndolas en la realidad; la relación de estas deformaciones en dos puntos ha resultado coincidente con lo que cabría esperar a partir de las hipótesis, claramente aproximadas, que acabamos de reseñar.

Es obvio que no pretendemos que los procedimientos aproximados que hemos explicado para este último caso, agoten el problema teórico; solamente nos proponemos que el lector recorra con nosotros el proceso que permite resolver un complejísimo problema técnico apoyándose en claros conceptos básicos.

Para saber que el procedimiento de usar el l medio es correcto, hubo al principio que usar el método de aproximaciones sucesivas.

La ecuación (6) puede ponerse en la forma:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = - \left[q \sqrt{\rho_c^2 + x^2} + EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + x^2)^2} \right] \cdot y$$

que muestra que el arco AC puede considerarse como una columna comprimida axialmente con una carga variable:

$$N_{\varphi} = q \cdot \sqrt{\rho_x^2 + x^2} + EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + x^2)^2}$$

cuyos valores extremos son:

$$N_{\text{clave}} = q \cdot \rho_c + \frac{EI}{\rho_c^2}$$

y

$$N_{\text{arranque}} = q \cdot \sqrt{\rho_c^2 + \tau^2} + EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + \tau^2)^2}$$

Conviene destacar que el término $EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + x^2)^2}$ es siempre despreciable en los casos concretos, o sea con los valores de l , ρ_c y τ que se dan en las estructuras para las que el estudio de la estabilidad elástica es determinante en el diseño.

Consideremos la Figura 23 donde hemos indicado la distribución de los N_{φ} y de los momentos de inercia a lo largo de AC para el caso concreto de una bóveda de 43 m de luz y flecha un octavo de esta luz. Como se ve N_{φ} varía muy poco de A a C como siempre sucede en arcos rebajados para los que el pandeo es determinante en el diseño.

Conviene hacer notar aquí que la catenaria será funicular de las cargas reales sólo en el caso de ondulaciones suaves. En caso de que fueran fuertes (lo que no se da en la práctica) o de láminas onduladas discontinuas con fuertes pendientes, es obvio que, considerando las franjas de bóveda en que se den estas fuertes pendientes, la funicular de las cargas no es una catenaria, y, si usamos como directriz la catenaria, tendremos flexiones. En los casos concretos que hemos manejado, estas flexiones han sido pequeñas y pudo hacerse la aproximación de que la directriz catenaria era funicular de las cargas.

En la Figura 23 se esquematiza el proceso de cálculo:

1. A partir de la geometría elegida podemos dibujar el diagrama de los N_{φ} y el de los I para todos los elementos Δx de la «columna» AC. Por economía de dibujo damos sólo los valores extremos e intermedio de N_{φ} ; su valor medio, N , se sacó del diagrama que no reproducimos.
2. Elegimos una elástica de partida cuya flecha máxima, que hacemos igual a uno, está desplazada hacia A, dadas las menores inercias próximas al arranque.
3. Calculamos la línea de carga $\frac{N \cdot y}{I}$, y , con esta, el correspondiente diagrama de momentos, cuyo máximo, partido por E , será la flecha máxima que no tiene por qué coincidir ni en valor ni en posición, con la elegida.

El proceso de corrección de la carga es el mismo que en las columnas. Como resultado de las sucesivas aproximaciones (no más de dos con una buena elección del valor inicial de N y de la curva de partida) obtenemos $N_{crítica}$. En nuestro caso, por una buena elección de la curva de partida la coincidencia en la posición de la flecha máxima es exacta.

Si el coeficiente de seguridad no fuera aceptable debemos modificar la geometría aumentando la rigidez de la lámina, hasta obtener un coeficiente de seguridad superior a 4. En el caso de la Figura 23, el valor de coeficiente de seguridad resultó mayor de lo necesario y sería conveniente disminuir la rigidez (o sea las curvaturas) por razones económicas.

Con los medios de cálculo numérico de que hoy se dispone, puede obviarse el método gráfico-analítico descrito y proceder, aún en el caso de láminas onduladas discontinuas, a determinar en cada caso la carga crítica a partir de la integración numérica de la ecuación (6) en que sustituimos el I de cada elemento, de aquellos en que dividimos el arco, por el que resulta de la geometría previamente elegida.

La solución del problema planteado por el método de aproximaciones sucesivas, es un buen ejemplo de cómo pueden resolverse aproximadamente, problemas técnicos muy complejos, si tenemos claros los conceptos básicos.

CONDICIONES DE APOYO

Hemos supuesto la cubierta articulada en la estructura de sostén que es lo adecuado en los casos usuales.

Si estuviera empotrado el método explicado puede aplicarse sin dificultad como ya mostramos en el caso de las columnas.

COEXISTENCIA EN ARCOS DE FUERZA DIRECTA CON FLEXIONES

Supondremos primero un arco cuya directriz sea funicular del peso propio o de las cargas fijas, de sección constante o variable, con simetría respecto a C .

Las flexiones se deben a la acción de otras cargas que las fijas, que producirán no sólo momentos sino cortantes, modificando además la carga directa.

En el caso de las cubiertas las flexiones se deben al viento, a la nieve o a la acción; en ciertos casos, de cargas suspendidas del techo (que pueden provenir, por ejemplo, de correas transportadoras, canalizaciones eléctricas o de aire comprimido, etc.).

En todos los casos en que hemos tenido que intervenir los cortantes eran pequeños y también pequeña, la variación de la fuerza directa.

Si bien todos nuestros desarrollos, se basaron en la hipótesis de flexión pura, sin cortante, sabemos que pueden extenderse al caso de flexión con cortante en piezas flexibles como son aquellas en que puede haber riesgo de pandeo.

Aún en el caso de arcos de puente los cortantes no impedirán usar las fórmulas y desarrollos obtenidos en la hipótesis de flexión pura.

La simple exposición del método de cálculo aconsejado, lo justifica:

1. Damos a la cubierta la sección transversal (constante o variable), para que el coeficiente de seguridad frente al pandeo sea de 4 a 5. En el caso de las cubiertas esta seguridad se referirá a la carga por unidad de desarrollo del arco, ya que las modificaciones de la fuerza directa que producen las cargas accidentales son pequeñas¹⁷.

Con el coeficiente de seguridad arriba indicado, se obtienen, en las condiciones del Río de la Plata, estructuras que resultan estables cuando se prosigue el cálculo como se indica más abajo. En el caso de los puentes habrá que fijar el coeficiente de seguridad teniendo en cuenta las fuerzas directas totales.

2. Con las cargas accidentales determinamos los momentos a los que llamaremos M_0 .
3. Con el diagrama de momentos determinamos la correspondiente elástica de ordenada genérica y_0 .
4. A causa de las deformaciones que esta elástica pone de manifiesto, aparecerán nuevos momentos $N \cdot y_0$, con lo que los momentos pasan a ser $M_1 = M_0 + N \cdot y_0$, que producen a su vez deformaciones y_1 ; con lo que los momentos pasan a ser $M_2 = M_0 + N \cdot y_1$ que producen a su vez deformaciones y_2 ... Las ordenadas genéricas y_0, y_1, y_2 ... forman, si la lámina o el arco se han dimensionado correctamente, una serie convergente.
5. En el caso de las cubiertas, y con los coeficientes de seguridad arriba indicados, esta convergencia es rápida.
6. Con los momentos finales y las fuerzas directas debidas al peso propio y las cargas accidentales se dimensionan el arco o la lámina.

ARCOS O LAMINAS QUE NO SON FUNICULAR DE LAS CARGAS

Es obvio que en las cubiertas conviene hacer la directriz, funicular de las cargas fijas, en general el peso propio. Puede no ser esto lo conveniente en el caso de arcos de puente, en que trataremos de obtener solicitaciones finales que nos den un costo mínimo.

De cualquier modo el caso del arco o lámina que no es funicular de las cargas, se reduce al anterior, ya que será siempre equivalente a un arco, funicular de las cargas, más un sistema de momentos flectores de partida, al que habrá luego que superponer los momentos de las cargas accidentales. El cálculo puede pues realizarse de acuerdo a los desarrollos anteriores.

¹⁷ Un caso en que pueden producirse variaciones importantes de fuerza directa son aquellos en que se usa una lámina de directriz catenaria, muy peraltada, como continente de silos para grano o fertilizante. En estos casos, sin embargo, el problema no es el pandeo (las fuerzas directas debidas al peso propio son muy pequeñas y las secciones que requieren las flexiones, muy importante), sino las flexiones.

No son aquí, por tanto, útiles los desarrollos anteriores; el dimensionar la estructura para resistir las flexiones aleja todo riesgo de pandeo.

OBSERVACION FINAL

Las consideraciones conceptuales que informan este trabajo y los métodos propuestos, constituyen por lo menos el rudimento de un método general de ataque de problemas de pandeo no tratados específicamente en los libros que conozco sobre el tema.

Dada la gran complejidad analítica que tienen estos problemas, la manera madura de atacarlos, para los casos no específicamente desarrollados en este trabajo, y cuya solución, en lo que antecede sólo esbozamos, sería la siguiente:

1. Con los métodos gráficos verificar, en cada caso, la viabilidad de una posible forma como solución para un específico tipo de problemas.
2. Asegurada la viabilidad de esa solución, estudiar los programas para resolver por computación el problema dado.

Calculation
Methods

Calculation Methods

Because of our vocation and because of its importance, we have devised new and rational ways in which brick can be used and have designed equipment (moulds, precompression jacks, etc.) to make these innovative ways of using brick viable. However, we have not had the time nor the opportunity to develop a system for deducing the admissible stresses from the tests. We have made a great effort to achieve a degree of certainty in our work, but this work is still insufficient and must be systematized.

It is practically an axiom that well-designed structures are easy to calculate and their stresses are low, but there are usually areas or stresses for which more exact information would be needed.

Towers, for example, have small stresses for fixed loads but may have greater stresses because of the effects of wind and, lacking this standardization work, one must be prudent. For brick with a 220 k/cm^2 failure load, tested on cubes, we allow for a fixed 60 k/cm^2 load and wind speeds of up to 90 k/cm^2 .

Perforated Towers

The calculation of perforated towers is an example of what has always been our criterion: to synthetically see the overall work mode of each structure and design it according to that overall vision.

For towers, the process can be summarized as follows:

The calculation of the torque on any section can be carried out by determining:

1. The vertical component of the resultant that is the weight on the section under consideration.
2. The horizontal component is calculated from the wind patterns. In the absence of tests, we make our calculations for a rough, continuous surface, which is obviously unfavourable. Since this deals with very slender structures, consideration must be given, at least in principle, to dynamic wind action, and, consequently, to the mass of the tower in the vibratory movement generated by wind gusts. We have measured periods of wind gusts of three seconds, which is unfavourable. The mass of the tower is calculated by Lord Raleigh's method (while calculating the kinetic energy to apply the energy equation, making its variation equal to the corresponding variation of the tower's potential strain energy¹). In all the cases studied until present, no differences are seen in the dynamic study; therefore, the wind load is considered static, the natural period of the structure is much less than the period calculated for the wind gusts, and there is absolutely no risk of resonance.
3. The bending moment is that which is due to the wind forces on the section under consideration.

To find the direction of N , which is the result of the compressions, and T , which is the result of the tractions, in any given section, the value and position of the vertical component of each is calculated in that section and in another over it and close by, let us say at 1 m. The direction can be found by joining the application points. To calculate them, I allow that, for wind effects, all the section is active, which is what occurs for short-term effects. I consider the tower to be a homogeneous and continuous tube, the average r being equal to that of the real tower, and with a thickness e , such that $2 \cdot \pi \cdot r e = \Omega$, where Ω is the real section we are considering. Finding the maximum compression and traction stresses is basic. It is no more work to consider the section in its real shape, but the differences in comparison with the approximate method of considering a solid tube are small and this method is easier to expound.

If σ_T is the maximum traction stress, the iron with which we should reinforce the "column" in the section under consideration will be:

$$\frac{\sigma_T \cdot \omega}{Fe} \leq \sigma_e \cdot \text{adm. (which is slightly unfavourable since average } \sigma_T < \sigma_T.)$$

where ω is the section of the "column".

For common twisted steel with $\sigma_T = 4,200 \text{ k/cm}^2$, we take admissible $\sigma_e = 3,000 \text{ k/cm}^2$.

¹ See Timoshenko ("Vibrations Problems in Engineering").

To dimension the structure to the shear force, we make it coherent with the hypothesis that the tower works like a tube. Its cavities, whose function during the construction has already been explained, geometrically form the "crossbeams" between "columns". These "crossbeams" are indispensable for the hypothesis that the tower effectively works like a tube. Through these "crossbeams", the shear force Q must pass, which tends to produce the displacement of the point of a column at one end of the "crossbeam" in relation to the point of the adjacent column at the other end of the "crossbeam". The value of shear force Q results from the dynamics of Fig. 2, in which we can clearly see the static ratio of the trunco-conical shape of the tower, referred to in the general explanation.

Each section of the tower works under compression-bending. In a full section, the main traction stress to be absorbed is calculated at each point by composing the corresponding compression or traction with the τ of the shear force. In such a structure as this, the compressions or tractions go through the columns, and the **whole** shear force must pass along the "crossbeams", which bear no compression or traction. That cross-cutting tension must therefore be the maximum. This can be calculated, with reasonable accuracy (Fig. 3), taking into account the section as a ring.

$$b \cdot \tau \text{ max.} = 2 \cdot e \cdot \tau \text{ max.} = \frac{Q \mu \text{ max.}}{l \times \chi} \text{ in which } b = 2 \cdot e$$

is the width of the section $\cdot \mu \text{ max.} = 2 \cdot r^2 \cdot e \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = 2 \cdot r^2 \cdot e = \frac{\Omega \cdot r}{\pi}$ therefore

$$2 \cdot e \cdot \tau \text{ max.} = \frac{2Q}{\pi r}$$

If the separation between "crossbeams" is a , and, given that there is a "crossbeam" on each side, each one must withstand a force

$$R = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e \cdot \tau \text{ max.} \cdot a = \frac{Q \cdot a}{\pi r}$$

The "crossbeam" (Fig. 4) must withstand shear R and the bending $\frac{Rl}{2}$.

Calculation shows that bending is determinant. One is the span between columns plus the width needed for R to pass through the column.

As we have shown in the part referring to the calculation of the free-standing vaults, the internal forces produced by the horizontal stresses deform the deck. This concept, when transferred to perforated towers, produces twisting in the columns. We have analysed this effect in the largest towers built (television antennas). The torque forces are very small and do not affect the dimensioning.

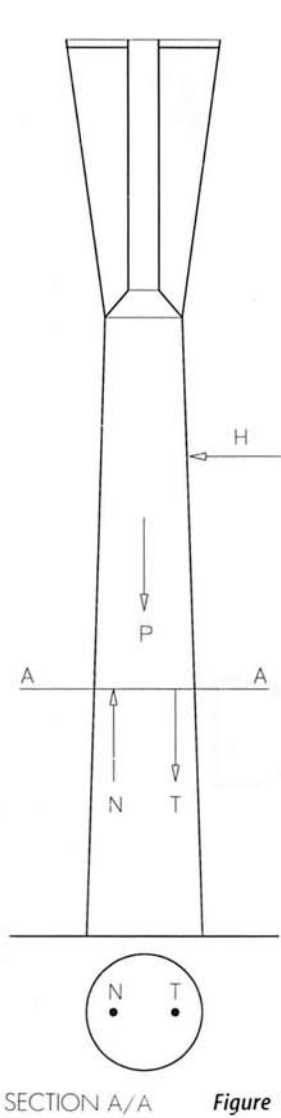


Figure 1

Dynamics of the Reactions about the section

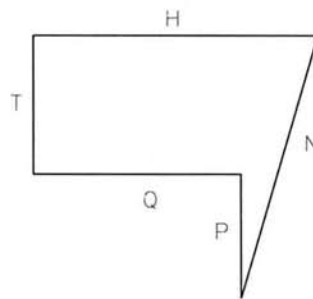


Figure 2

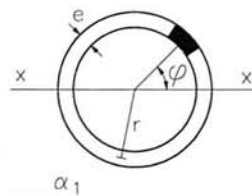


Figure 3

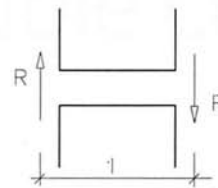


Figure 4

We must add that the strict calculation of these towers can only be carried out by computation, but their predimensioning should always be done by following the approximate methods that we explain here, which are, on the other hand, those we have always used without any problem.

In the tanks, the calculation of the conical dome at the back of the vat and of the reinforcement of its walls also follows the standard methods.



Deflection in double curvature vaults

Prologue

When we want use a scientific theory to interpret some aspect of reality, we try to distill from that reality the essence of the phenomenon to be studied. We imagine ideal situations that ignore the problem's complexity in an effort to make it more intelligible and, at times, easier to control.

When Galileo conceived the first law of dynamics, the law of inertia, no body existed that was totally free from the action of other bodies. His experiences showed him, however, that the more he isolated the body under study from the actions of other bodies, the more its "state of rest or movement" was maintained. Then he took the intuitive leap of imagining it under ideal conditions, in the absence of any exterior action, to establish that in such a case, its "state of rest or movement" (velocity) would remain the same.

This law cannot be proven by any experiment. It is, however, the first link in the deductive chain of mechanics (and therefore of physics) which will verify the entire set of consequences.

In the case of deflection, as it has been described in the books I am familiar with, the ideal example, the model which is the object of an imaginary experiment, is not clearly defined.

The use of the word "model" in this case implies the need to define the structure with which we will carry out our imaginary experiment and the stresses to which we will subject it. Once this imaginary experiment has been performed and the corresponding conclusions drawn, we will better understand how to approach real problems.

It is for this reason that we begin with the ideal problem of deflection without bending (except, of course, that bending which is derived from deflection itself). Then, we analyse the concurrence of bending with axial loads, first in columns, and later in arches.

The following is not a treatise on deflection (all that can be read in current textbooks has been deliberately omitted); rather, it is a reflection on the topic's inherent difficulties, a reflection that is the result of having had to deal with problems of deflection in wide-span roofs.

Upon studying deflection problems for the first time, I was quite surprised to find that it was an almost completely unexplored field¹. Solving these problems not only required finding practical work methods, but, beyond that, obligated me to state precisely and to clarify my own concepts.

Experience has shown me once more that the two stages, the practical solution and the clarification of the theoretical foundations on which that solution is based, aid and enrich each other.

I believe that the pages that follow can be useful to help students develop clear ideas about a topic which, as I have seen throughout many years of teaching, often puzzles them.

¹ A 500-page book such as the *Theory of Elastic Stability* by Timoshenko devotes only five pages to deflection of arches.

This text includes not only clear working methods, but also tables that give a rapid solution to various problems; for example, the calculation of the critical stress of an arch with a catenary directrix which is a funicular with uniform loads along its length.

This paper has been made possible by the invaluable assistance of the Computing Centre of the University of the Republic, particularly that of the Centre's former director, Engineer L. Osín and its present interim director, Engineer Ms. Alia de Saravia.

I should also mention the collaboration of a student, J. Masanés, whose interest helped in the transition, which is not always easy, from the stage in which all essential ideas are initially formulated to the proper stage for the ideas to appear in printed form.

ELASTIC INSTABILITY

In all of the following text, we suppose that the structures analysed operate within the elastic period, not only for the loads they initially carry, but also when we add other loads with which we move the structures from their equilibrium position. We also assume that the loads applied (those supported by the structure and those added to move it from its equilibrium position) will be added gradually so as to exclude the possibility of oscillation in the system.

We will consider a body which we will suppose, as we have already stated, to be perfectly elastic, free or restrained, in equilibrium under the influence of the forces applied to it and its restraints; for example, the beam in figure 1 with load P . We say, in this case and other analogous cases, that the equilibrium is stable when, having moved the body from its equilibrium configuration by modifying the initial system of loads or restraints, (in the case of Figure 1 applying, for example, a new force P'), and later returning it to its initial load and restraint conditions, the body recovers its initial geometric equilibrium configuration.

We have supposed that the modification of the initial system of loads or restraints will not produce permanent deformation. This supposes that, in specific engineering cases, the points of the elastic body undergo displacements whose dimensions are negligible in comparison with the dimensions of the body itself. Since structures are designed so that stresses are, at least in the ideal image that we envision of these structures, far below the fluidity of the materials used, it will always be possible to move the body from its equilibrium position without creating permanent deformation.

Figure 1 shows a case of elastic stability. When force P' is eliminated, the beam returns to its initial position. If, on the other hand, once the body is separated from its equilibrium position and then returned to its initial load and restraint conditions, it does not return to its initial geometric configuration, we say that the equilibrium was unstable. The classic case of elastic instability is that of deflection.

As an example of a structure that may deflect, we will consider a slender column AB , (Figure 2) connected with no friction at A and B . Its axis, a line that joins the centres of gravity of the different sections, is assumed

to be a straight line and, for simplicity, we will suppose that these sections are geometrically and elastically constant. We will also suppose that there is no friction at the guides of joint A , which we suppose restrict the movement of A to movement along AB .

Let us subject the column to the action of a load P , applied at A and collinear with AB . If the assumptions indicated above were fulfilled, we could load the column with a load P as large as we wanted without line AB ceasing to be straight; the strains, even the permanent ones, would occur along AB .

The column in Figure 2 will be our ideal model.

Let us suppose that we move the column from its equilibrium position with transverse force P' and later eliminate the action of P' . If the column does not return to its initial geometric configuration, the equilibrium was unstable; we say that the column buckles or deflects.

We know that deflection will only come about if load P surpasses a value, P_{cr} , which we call the critical load. It is not inevitable that deflection will produce permanent deformation when this occurs; the stability or instability of the initial equilibrium configuration will depend on whether P is less than, equal to, or greater than P_{cr} .

As we stated initially, our working hypothesis is that we will remain within the elastic period; later, when P and P' coexist, the maximum strain will be δ' (Figure 2). When we eliminate P' , the strain will diminish from δ' to δ , and obviously $\delta < \delta'$. The configuration of the deflected elastic body will be one of stable equilibrium according to the definition given above. **The term elastic instability refers to the initial equilibrium configuration;** the deflection configuration itself has a stable equilibrium.

If we were to actually carry out an axial loading experiment with ever greater loads on a slender column according to a model like the one in Figure 2, we would see that, when the load approaches the critical load,

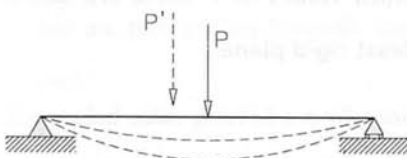


Figure 1

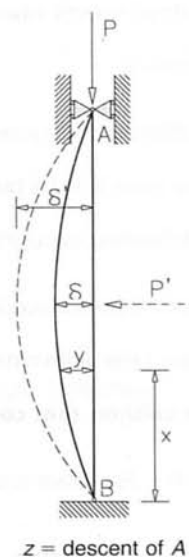


Figure 2

the column buckles. For loads greater than the critical load, the strains are visible, they are not negligible in comparison with the length of the bar, and it will be observed, each value of the load corresponds to a strain value.

With no visible action of any agent capable of producing transverse strains in the column, and, apparently the sole action of force P , buckling has occurred. We know that a perfect coaxiality between P and the axis of the column is not possible, not only because of indeterminateness in the centring and direction of load P , but also because the axis of the column will never be perfectly straight nor will its cross section be geometrically or elastically constant. Neither will we be able to apply the load without producing vibrations or, in other words, lateral strains.

The schematic idealization that we always make when we study a structure does not create in other cases, such as in the bending in Figure 1, substantial differences in behaviour between the diagram and reality. In the structure that we idealize with the diagram in Figure 2, the difference between what we expected to occur and what really occurs depends on the value of P .

Let us suppose, in effect, that all the ideal hypotheses are fulfilled except the hypothesis that the only force acting is P . Let us suppose that with P , small P' forces also occur, derived, for example, from the wind. The strain of the column would be imperceptible while $P < P_{cr}$. For $P > P_{cr}$, the strains increase rapidly with P .

Supposing that P' has deformed the column and later ceased to affect it, we will see that, even in the ideal case, a load 3.5% greater than the critical load will produce a strain in the column such that the angle between the vertical tangent and the elastic line at the joints will be 30 degrees.

For any other type of departure (which we suppose will be small) from the conditions of our ideal model, the strains will also be small except when $P > P_{cr}$, for which strains are produced that can be greater than are normal in material resistance.

Let us consider the diagram in Figure 2 and imagine the ideal conditions already stated. It is normal for the section of the column to have at least two planes of symmetry. It is an established fact, whose theoretical base will be clarified in the following exposition, that deflection occurs on the least rigid plane.

We move the column from its equilibrium position, applying, for example, along its least rigid plane a transverse force that we later eliminate. **Let us calculate for which values of P there are equilibrium configurations for the column that coexist with strains on its least rigid plane.**

We will see that for $P > P_{cr}$, there is a well-defined elastic line since P_{cr} is a limiting value below which the strains disappear.

The problem that Bernouilli challenged Euler with («because of his expertise in solving differential equa-

tions») was solved by Euler two centuries ago². The first approach to the correct solution, which was put forward by Euler and is the solution that appears in most textbooks, supposes that the strains are very small so that the curvature

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

can be written in the approximate form $\frac{1}{\rho} = y''$, which is common in the theory of pure flexibility; in other words, with conventional signs:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}$$

therefore,

$$y = C_1 \cdot \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x + C_2 \cdot \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x$$

For $x = 0$, $y = 0$ therefore $C_2 = 0$.

For $x = \tau$ $y = 0$ therefore $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = n \cdot \pi$,

therefore, force P , which produces an equilibrium configuration of a column with a strain transverse to its axis is:

$$P = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{\tau^2}$$

The minimum value of P , called Euler critical load, is

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\tau^2}$$

For this value of P :

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{\tau}$$

the equation of the elastic line would be

$$y = \delta \sin \frac{\pi}{\tau} \cdot x$$

a sinusoidal arc that passes through the joints and has a maximum deflection δ (indeterminate) at its middle point.

² The problem set forward by Bernouilli was a theoretical problem, the determination of the equilibrium configurations of "un ruban elastique" subjected to a load along its axis. This problem had nothing to do with any technical or practical requirement. In the XVIII century, no slender structures were built. This is a good example, in my opinion, of modern mathematical thought investigating reality: Anticipating by means of reflections and solutions, which are necessarily schematic, the needs of science or technology.

The previous solution is not satisfactory, for this reason: the maximum deflection δ is indeterminate; there would be an infinite number of elastic lines possible for the same load P , which is conceptually absurd (consider the energy equation) and, of course, contrary to everyday experience.

Also, the strain of the column is compatible only with loads $P = Pc, 4Pc, 9Pc, \dots$, but not with values of P between these loads, which would mean that the column would buckle for a load Pc but not for a load $> Pc$ and $< 4Pc$, which is also absurd and contrary to experience.

The reason for these absurd conclusions is that the approximate expression $1/\rho = y''$ is not applicable in this case. In fact, this approximation supposes that y' is negligible in comparison with 1, which only corresponds to values of P that differ very little from the lower limit of the range, in other words of Pc , for which we are studying the problem; therefore, the approximation is not valid in all the range $P > Pc$, object of said study.

Let's go back to the expression for the curve:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

If we disregard the strains due to shear forces, which is always admissible in the normal cases of bending and more so in our case, given that problems of buckling arise in slender columns and given that the shear forces, projections of P according to the normal to the curve, are small, above all for the values of P approaching Pc , we can write:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}$$

where

$$\frac{d\theta}{ds} \cdot d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\frac{P}{EI} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot d\theta = -\frac{P}{EI} \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

where

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{P}{EI} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

where θ_0 is the slope at the origin.

Then:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = -\sqrt{\frac{2P}{EI}} \cdot ds$$

(choosing from the possible signs of $\frac{d\theta}{ds}$ the sign that is compatible with the form of the elastic line and keeping in mind that $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$)

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{2P}{EI}} ds = \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}} \quad (1)$$

because $\theta = 0$ for $s = \frac{\tau}{2}$:

$$-2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2} = \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (1')$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Let:

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = a, \quad \sin \frac{\theta}{2} = a \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

For: $\theta = 0, \varphi = 0$; For $\theta = \theta_0, \varphi = \frac{\pi}{2}$;

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = a \cdot \cos \varphi \quad (3)$$

From (2):

$$\cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} d\theta = a \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

because

$$d\theta = \frac{2 \cdot a \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4)$$

Then:

$$\frac{\bar{P}}{EI} \cdot \tau = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

The minimum value of the integral is obtained if $a = 0$; in other words, if $\theta_0 = 0$, which is the same if there is no buckling. Therefore, **for buckling to exist**, P must be greater than the value corresponding to the minimum of the integral.

If $a = 0$, the integral has the value $\pi/2$, and the corresponding value gives:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{\tau^2} = \text{Euler's } P \text{ critical}$$

For the integral to have a value greater than $> \pi/2$, (in other words, **so a possible equilibrium configuration with a deflected column will exist**), P must be greater than:

$$\frac{\pi^2 EI}{\tau^2}$$

Therefore, for $P \leq P_{cr}$, the column, moved from its rectilinear equilibrium position and left to itself, retakes its initial rectilinear equilibrium configuration.

For $P > P_{cr}$, there exists an equilibrium position univocally determined by P , which is compatible with a flexed, deflected configuration of the column.

The values of the elliptic integral of the second member have been tabulated for different values of a .

For values of P slightly higher than P_c , the strains are very great, higher than those allowed in the normal material resistance theories, in which we suppose the "macrogeometry" of the solids studied to be invariable. For example, if $\theta_0 = 30$ degrees³, the integer has a value of 1.598.

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = 2 \cdot 1.598 = 3.196 \quad \text{por lo tanto} \quad P = \left(\frac{3.916}{\pi}\right)^2 P_c = 1.0349 P_c$$

Therefore, a load 3.5% greater than the critical load suffices to produce large enough strains in the column so that the slope at the joints is 30 degrees.

With a thin wooden or steel rod, any student can carry out rough but illustrative experiments that will convince him of what has been proven here: the large magnitude of the strains as soon as P_c is surpassed, how these strains are not necessarily permanent deformations, the univocality between load and strain, and the fact that the state of the deflected column is one of stable equilibrium.

To calculate the maximum rise f of the elastic line, we use equation (1), multiplying the two members by $\sin \theta$.

$$-2 \sqrt{\frac{P}{EI}} dy = \frac{\sin \theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \tag{5}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = 2a \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}$$

Taking into account the sign of (5) and considering (3) and (4):

$$2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot f = \int_0^{\pi/2} 2a \sin \varphi \cdot \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{2d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

Hence:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot f = \int_0^{\pi/2} 2a \sin \varphi d\varphi = 2a$$

³ $a = \sin \frac{30^\circ}{2}$.

A table of elliptic integrals can be seen, for example, in Hütte.

For the previous example in which $P = 1.0349P_c$

$$\theta_0 = 30^\circ \quad \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \tau = 3.196 \quad ; \quad 2a = 2 \sin 15^\circ = 0.518$$

Hence:

$$f = \frac{2a}{\sqrt{\frac{P}{EI}}} = \frac{0.518}{3.196} \quad \tau = 0.162\tau^4$$

which once again shows the entity of the strains: for a load 3.5 % greater than P_c , the rise is 18 % of the length of the column.

Let us summarize the previous results:

For the ideal model, which is our starting point, we have:

1. If $P \leq P_c$, line AB (figure 2) is the stable equilibrium configuration.
2. If $P > P_c$, the configuration of the rectilinear axis has an unstable equilibrium, the stable equilibrium configuration is a plane curve, perfectly defined for each value of P , whose maximum rise we calculated above.
3. Other equilibrium configurations are possible and are evidently unstable and of no interest from the point of view of physics; they are, as we know, those corresponding to $n = 2, 3, \dots$, in the expression from which we obtained Euler's critical load. In the analysis developed here, we would obtain them from the equation (1') replacing $\tau/2$ with $\tau/4, \tau/6, \dots$
4. Euler's critical load designates, therefore, the limit at which we can expect significant strains incompatible with the correct operation of the structures which the column could be part of.
5. The correct solution of the problem raises all the objections that can be made to Euler's approximate solution and shows us that the results obtained based on it are correct as far as the calculation of the P_c limiting value is concerned.
6. The strains are not proportional to the load; therefore, the superposition principle is not valid. The potential elastic energy does not have the form, quadratic in f , which is usual in other problems of material resistance.

⁴ For other values of P , the results are:

Force:	1.0153 P_c	Rise:	0.1097 τ
	1.0038 P_c		0.0554 τ
	1.0010 P_c		0.0139 τ
	1.00007 P_c		0.00278 τ

7. It is a good idea to clearly show a difference between the results obtained with Euler's approximate solution and the correct solution of the problem. With Euler's solution, deflection would occur only for loads $P = P_{cr}$, $4P_{cr}$, $9P_{cr}$, ..., of which "for reasons of physics" $P = P_{cr}$ is chosen. With the correct solution, deflection occurs only if $P > P_{cr}$. With the value $P = P_{cr}$, the configuration with rectilinear AB is one of stable equilibrium.
8. The difference that many texts establish between small and large strains of a slender column compressed along its axis, is valid from the point of view of the simplifications that can be made, for the first case, in the mathematical treatment of the problem, but they are confusing when it comes to a clear comprehension of the physical phenomenon. This is the same whether the strains are large or small and the univocity between the load and the maximum rise exists for every value of $P = (1 + \varepsilon)P_c$, whatever ε may be.

AXIAL FORCE CONCURRENT WITH BENDING

Let us consider the case in which bending and deflection occur on the same plane, which is the most important case. In effect: the slender structures with a complex analysis from the point of view of deflection are wide-span roofs and bridges.

We will consider, for example, a bridge such as the one in Figure 3. Aesthetic and economic grounds may mean that the elastic connections between the deck and the arches, which are the main support structure, will be very light.

If these arches are very slender, we must study the danger of the arch deflecting on the plane of the figure, which is also the "plane of bending". Of course, the arch can deflect with an elastic line that runs off the plane of the figure, but in general this is easier to solve because all of the width of the vault is available and, attaching the arches, a very rigid structure can be obtained whose rigidity, normally on the plane of the figure, is very great.

As we will later see in the study of the deflection of double curve vaults, the risk of deflection occurs on a plane that coincides with that of the flexures.

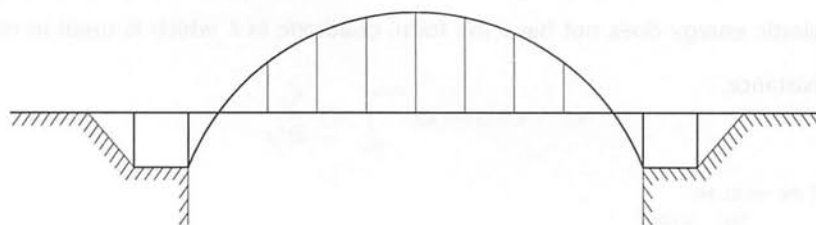


Figure 3

ECENTRIC COMPRESSION OF A SLENDER COLUMN

Let us consider (Figure 4) the case of a column that has all the characteristics of the "model" in Figure 2, except that force P , applied along AB , has an eccentricity, e , with respect to the axis of the column. We will suppose that the corbel, to the end of which force P is applied, is very rigid.

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{P}{EI} \cdot (y + e \cos \cdot \theta_0)$$

$$d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\frac{P}{EI} dy$$

$$\frac{d\theta}{ds} \cdot d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\frac{P}{EI} \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta$$

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2 = \frac{2P}{EI} \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0) = -\frac{4P}{EI} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

But

$$\frac{1}{\rho_0} = -\frac{P \cdot e \cdot \cos \cdot \theta_0}{EI}$$

therefore (choosing for $\frac{d\theta}{ds}$, of the two possible signs, the sign compatible with the form of the elastic line):

$$\frac{d\theta}{ds} = -2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \sqrt{\text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{4 \cdot EI} - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}$$

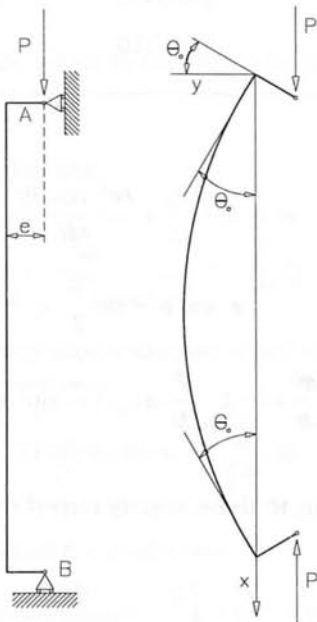


Figure 4

Table 1

$\gamma = \frac{e}{Pcr}$	$\alpha = \frac{P}{Pcr}$	θ_0 in degrees	$\frac{f}{\tau}$	$\frac{M}{P.e} = \frac{f/\tau + \gamma}{\gamma}$
0,040	0.40	6.99004	0.03338	1.8345
0.040	0.80	29.85078	0.15188	4.7970
0.040	0.90	41.48169	0.20956	6.2390
0.040	1.00	53.80014	0.26537	7.6342
0.040	1.03	57.35240	0.28020	8.0050
0.020	0.40	3.49504	0.01665	1.8325
0.020	0.80	17.64693	0.09177	5.5885
0.020	0.90	29.16324	0.15238	8.6190
0.020	1.00	44.97670	0.22977	12.4885
0.020	1.03	49.73219	0.25116	13.5580
0.010	0.40	1.77617	0.00853	1.8530
0.010	0.80	9.39644	0.04926	5.9260
0.010	0.90	18.16258	0.09684	10.6840
0.010	1.00	36.95538	0.19394	20.3940
0.010	1.03	43.14325	0.22345	23.3450
0.005	0.40	0.91673	0.00448	1.8960
0.005	0.80	4.81283	0.02532	6.0640
0.005	0.90	10.08398	0.05426	11.8460
0.005	1.00	29.96538	0.16031	33.0620
0.005	1.03	37.87210	0.19965	40.9300

Let:

$$a^2 = \sin^2 \cdot \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{4EI}$$

$$a \cdot \text{sen } \varphi = \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -2 \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

Performing transformations analogous to those already carried out, we would have:

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{\frac{P}{EI}}} \cdot \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}}$$

where φ_0 is the value of φ for $\theta = \theta_0$ which has the value of:

$$\varphi_0 = \arcsin \cdot \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{P \cdot e^2 \cdot \cos^2 \theta_0}{4EI}}}$$

From the expression of τ we obtain:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P\tau^2}{EI}} = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\arcsin \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{P \cdot e^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}\right) \sin^2 \varphi}}$$

Let $P = \alpha Pcr$ and $e = \gamma \cdot \tau$

$$P = \alpha \frac{\pi^2 EI}{\tau^2} \quad \text{therefore} \quad \sqrt{\frac{P\tau^2}{EI}} = \pi \sqrt{\alpha}$$

$$\frac{Pe^2}{4EI} = \frac{\alpha \cdot \pi^2 EI}{\tau^2} \cdot \frac{1}{4EI} \cdot \gamma^2 \tau^2 = \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha} = \int_0^{\arcsin \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0}}} \frac{d\varphi}{1 - \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\alpha \cdot \pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0\right) \sin^2 \varphi}$$

θ_0 is the solution of equation (6) which, solved by calculation for different values of α and γ , appears in the third column of Table1.

To calculate the rise, we must remember that:

$$\frac{d\theta}{a \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = 2 \sqrt{\frac{P}{EI}} ds$$

therefore, proceeding as in the case of zero eccentricity, we would have:

$$2a \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = - \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot dy$$

Therefore if f is the maximum ordinate of the elastic line:

$$2a \int_0^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot d\varphi = 2a (-\cos \varphi_0 + 1) = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot f$$

in other words:

$$2 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}} \left(1 - \cos \cdot \arccos \cdot \sin \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{Pe^2 \cos^2 \theta_0}{4EI}}} \right) = f \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

and, using values α and γ that are already defined:

$$2 \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0} \left(1 - \cos \cdot \arccos \cdot \sin \frac{\sin \theta_0/2}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi^2 \cdot \gamma^2}{4} \cos^2 \theta_0}} \right) = f \sqrt{\frac{\alpha \cdot \pi^2}{\tau^2}} = \pi \frac{f}{\tau} \sqrt{\alpha} \quad (6)$$

The values of f/τ calculated as a function of α and γ appear in Table 1, which shows that the rise, for values approaching Pcr , are such that it is not coherent with the hypothesis that the "macrogeometry" will be maintained.

For small values of α , it will normally be admissible to use the approximate expression $1/\rho = y''$.

In this case,

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} = -P(y + e) \quad (\text{since } \cos \cdot \theta_0 \sim 1)$$

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - e$$

For $x = 0, y = 0, x = \frac{\tau}{2}, y' = 0$.

The result is:

$$y = e \left(\operatorname{tg} \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2} \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - 1 \right)$$

Therefore, the rise with respect to axis x will be:

$$f = \frac{1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2}}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot e$$

and y will be the absolute maximum

$$M = P(e + f) \quad \text{therefore} \quad \frac{M}{P \cdot e} = \frac{1}{\cos \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}} \quad (7)$$

The relationship between M/Pe and Euler's hypothesis is shown in Figure 5, using equation (7) beyond its approximate range of validity, and exactly with the value of f that figures in Table 1. When the results of Table 1 are graphed, they form an assemblage of curves with $\gamma = \text{constant}$ in which M/Pe turns out to be a function of α . All the curves run through point (0, 1) and are tangential at that point with the straight line $M/P \cdot e = 1$.

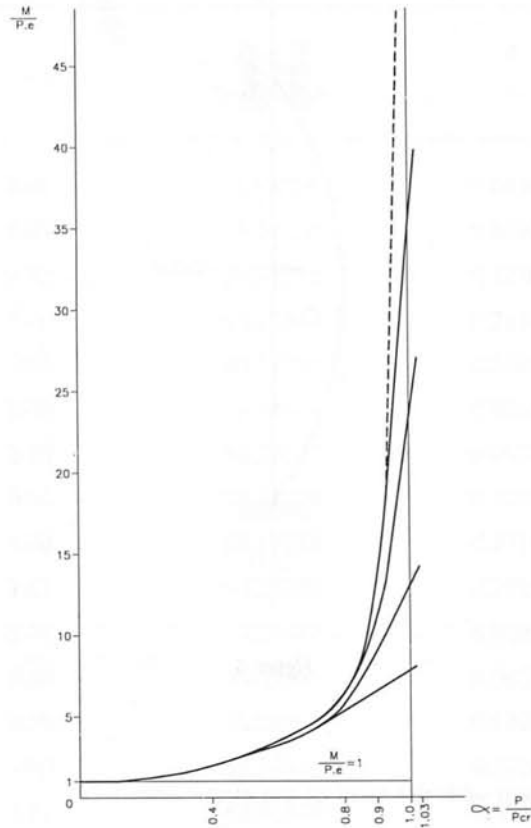


Figure 5

Figure 5 shows us that until $P = 0.4 P_{cr}$, the moments calculated coincide according to the exact solution and according to the solution we could call "Euler's solution", ($1/\rho = y''$). Starting at $P = 0.4 P_{cr}$, the curves representing the moments separate as a function of P/P_{cr} . With Euler's solution and for $P \rightarrow P_{cr} M \rightarrow \infty$, which is a result with no physical interest or meaning because we obtain it using an equation in an interval in which it is not coherent with what we want to study.

AXIAL LOAD ON A SLENDER COLUMN CONCURRENT WITH LOADS ON THE LEAST RIGID PLANE OF THE COLUMN

Because that which interests us most is to clarify concepts, and given the impossibility, when we use the correct expression for the curve, of integrating general expressions, we will only consider the simple case of a load $\omega \cdot P$ in the middle of the span (Figure 6).

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -P \cdot y - \frac{\omega P}{2} \cdot x \quad \text{therefore} \quad \frac{EI}{P} d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -dy - \frac{\omega}{2} \cdot dx$$

$$\frac{EI}{P} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\sin \theta \cdot d\theta - \frac{\omega}{2} \cos \theta \cdot d\theta$$

$$\frac{1}{2} \frac{EI}{P} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \cos \theta - \cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

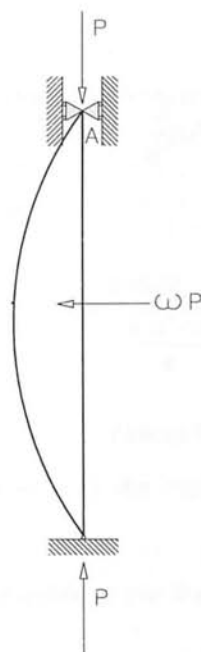


Figure 6

choosing the sign of $\frac{d\theta}{ds}$, coherent with the form of the elastic line:

$$\sqrt{\frac{EI}{2P}} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \sin \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \sin \theta_0 \right)}$$

given the symmetry of the elastic line:

$$\sqrt{\frac{2P}{EI}} \cdot \frac{\tau}{2} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \sin \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \sin \theta_0 \right)}}$$

Using the notation $\alpha = P/Pcr$ the result is:

$$\alpha = \frac{P}{Pcr} ; \quad \frac{M}{\omega \cdot P \cdot \tau / 4} = \frac{f/\tau + \omega/4}{\omega/4}$$

$$\pi \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \sin \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \sin \theta_0 \right)}}$$

For each value of ω , ($= 0.01; 0.02; \dots$) and for each value of α , ($= 0.2; 0.4; 0.8; 1; 1.03$); we will have a series of equations from which we can arrive at the corresponding θ_0 that appear in Table 2.

Table 2

ω	α	θ_0 in degrees	$\frac{f}{\tau}$	$\frac{M}{\omega \cdot P \cdot \tau/4}$
0.02	0.40	0.57296	0.00319	1.6380
0.02	0.80	5.38578	0.02925	6.8500
0.02	0.90	23.31914	0.12405	25.8100
0.02	1.00	52.88342	0.26216	53.4320
0.02	1.03	59.12759	0.28667	58.3340
0.04	0.40	1.14591	0.00637	1.6370
0.04	0.80	10.37045	0.05617	6.6170
0.04	0.90	30.42374	0.16010	17.0100
0.04	1.00	55.17523	0.27159	28.1590
0.04	1.03	60.90279	0.29350	30.3500
0.06	0.40	1.71887	0.00955	1.6367
0.06	0.80	14.95406	0.08075	6.3833
0.06	0.90	35.06464	0.18293	13.1953
0.06	1.00	57.12326	0.27943	19.6287
0.06	1.03	62.44893	0.29931	20.9540
0.08	0.40	2.29183	0.01274	1.6370
0.08	0.80	18.96471	0.10201	6.1005
0.08	0.90	38.67422	0.20025	11.0125
0.08	1.00	58.84128	0.28622	15.3110
0.08	1.03	63.88054	0.30464	16.2320
0.10	0.40	2.86479	0.01593	1.6372
0.10	0.80	22.51701	0.12062	5.8248
0.10	0.90	41.59628	0.21396	9.5584
0.10	1.00	60.33014	0.29197	12.6788
0.10	1.03	65.08308	0.30897	13.3588

To calculate the rise, we proceed as before. From the expression:

$$\sqrt{\frac{2P}{EI}} \cdot ds = - \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \sin \theta - \left(\cos \theta_0 + \frac{\omega}{2} \sin \theta_0 \right)}}$$

multiplying the two members by $\sin \theta$ and once again using the symmetry of the elastic line:

$$\frac{2P}{EI} \cdot f = \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \sin \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \sin \theta_0 \right)}}$$

$$\pi \sqrt{2\alpha} \cdot \frac{f}{\tau} = \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \frac{\omega}{2} \sin \theta - \left(\cos \theta_0 - \frac{\omega}{2} \sin \theta_0 \right)}}$$

Let C be the value of the integral:

$$f = \frac{1}{\pi \sqrt{2\alpha}} \cdot C \cdot \tau$$

The moment in this case will be:

$$M = \frac{C}{\pi \sqrt{2\alpha}} \cdot P \cdot \tau + \frac{\omega P}{4} \tau \quad \text{therefore} \quad M / \frac{\omega \cdot P \cdot \tau}{4} = 1 + \frac{4C}{\pi \omega \sqrt{2\alpha}}$$

Consequently, we can draw (Figure 7) the assemblage of curves ($\omega = \text{constant}$) that express the variation of:

$$M / \frac{\omega \cdot P \cdot \tau}{4} \quad \text{as a function of } \alpha, \quad \text{for } \omega = \text{constant.}$$

Let us find $M / \frac{\omega \cdot P \cdot \tau}{4}$, supposing that the expression $1/\rho = y''$ is valid, we will have:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py - \frac{\omega \cdot P}{2} \cdot x \quad \text{The general solution is: } \left(\text{for } x \leq \frac{\tau}{2} \right)$$

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \frac{\omega}{2} x$$

If $x = 0, y = 0$; If $x = \frac{\tau}{2}, y' = 0$

$$y = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x}{\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \cos \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P\tau^2}{EI}}} - x \right) = \frac{\omega}{2} \left(\tau \frac{\sin \sqrt{\alpha} \cdot \frac{\pi}{\tau} x}{\pi \sqrt{\alpha} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}} - x \right)$$

therefore

$$f = \frac{\omega \tau}{2} \left(\frac{1}{\pi \sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

Then:

$$M = \frac{P\omega\tau}{2} \left(\frac{1}{\pi \sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega P \tau}{4}$$

therefore

$$M / \frac{\omega P \tau}{4} = \frac{2}{\pi \sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \sqrt{\alpha} \frac{\pi}{2}$$

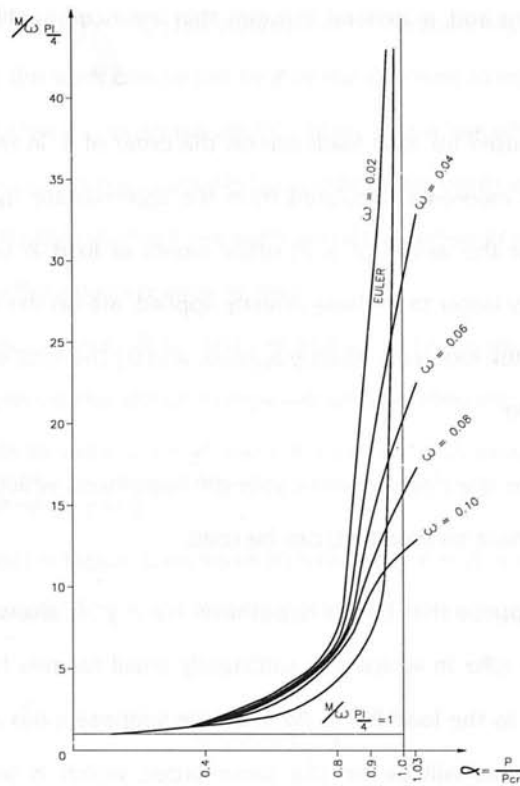


Figure 7

Also here for $\alpha \rightarrow 1$ $M \rightarrow \infty$, which is a useless result because we obtain it using an equation in an interval which is not coherent with what we want to study.

Other types of departure from the ideal model of the slender column would lead us to similar results.

SUMMARIZING THE RESULTS TO THIS POINT, WE ESTABLISH THE FOLLOWING

In the original ideal case (Figure 2), for $P \leq P_{cr}$, the equilibrium is stable; if the column is moved from its equilibrium position along its rectilinear axis, and if the cause of this separation is then eliminated, the initial rectilinear axis equilibrium configuration is reestablished. If $P > P_{cr}$, the initial configuration is not stable. Once the column has been moved from that initial position, and once the cause of this movement has been taken away, a deformation with a perfectly defined elastic line for each value of P is maintained. With the obvious limitation of not producing failure, the configuration of the bent or deformed column has a stable equilibrium. There is, therefore, a true discontinuity in the behaviour of the column, defined by the value $P = P_{cr}$.

When flexures coexist on the least rigid plane of the column with the load in line with its axis, initially rectilinear, there is no discontinuity. The bending due to the axial load is superimposed upon these flexures; the final moments, sum of those applied and those due to the axial load, substantially surpass the applied moments; for example, for loads one-fifth of P_{cr} , between 20 and 30%. As we approach P_{cr} , the final moments

increase greatly producing strains and, in general, tensions that are incompatible with the good behaviour of any structure.

The safety factors normally used for axial loads are on the order of 4, in relation to the critical load. For corresponding values of α , the moments calculated from the approximate hypothesis $1/\rho = y''$, and those calculated exactly, coincide. For the values of α , in other words of load P , used in engineering, the total moments, although substantially larger than those directly applied, are on the same order; also on the same order are the strains caused by the moments directly applied, and by the total moments, sum of the previous ones plus those due to $P = \alpha \cdot P_{cr}$.

In technically significant cases, the classic material strength hypothesis, which states that the macrogeometry of the structures studied cannot be modified, can be used.

In the following, we will suppose that Euler's hypothesis $1/\rho = y''$ is always valid. In the ideal case, since we will admit that $P = (1 + \varepsilon)P_{cr}$ in which ε is sufficiently small for this hypothesis to be valid. When flexures exist at the same time as the load $P = \alpha \cdot P_{cr}$ since we suppose α has a value such that the applied moments and the total moments will be on the same order, which is normal in practical problems, and which supposes, also in practice, that the strains will be small enough so that the hypothesis $1/\rho = y''$ will be valid.

APPLICATION OF THE ENERGY EQUATION TO DEFLECTION PROBLEMS

In normal stability problems, loads are applied so that the movements due to the strains of the structures studied are so slow that the kinetic, caloric, and other energies in play can be ignored with no appreciable error. The energy exchange will always be a transformation of the potential energy of the loads applied to the structure into potential strain energy.

Let us refer once again to our ideal model in Figure 2. We displace column AB , whose weight we suppose to be negligible, from its original equilibrium configuration by means of force P' ; let δ' be the strain corresponding to P' . If ΔU is the variation of the potential elastic energy produced when the column moves from the initial position in which AB is a straight line, (the column then only has potential compression energy) to the final flexed position, we have:

$$\Delta U = P \cdot z + T_p$$

in which T_p is the work realized by the force P' . Supposing, for example, $P' = \lambda \cdot y; T_p = P' \cdot \delta/2$. We can suppose $P' = \lambda \cdot y$, valid, and the previous equation as well, if we suppose P' is applied gradually, slowly enough to ignore, with no noticeable error, kinetic and other energies.

Let us remove P' . We know that if $P \leq P_{cr}$, the column will return to its initial position. We can express this in terms of energy saying that the work carried out by P or the decrease in its potential energy is not able to supply the column with the increase in potential elastic energy that it has when it is bowed⁵.

If $P > P_{cr}$, we know that there is a stable equilibrium configuration with a rise δ for each value of P . This equilibrium configuration will be that in which the decrease of the potential energy of P equals the column's strain energy, if we can ignore the other energies in play.

For each value of P , the variation $P \cdot z$ will be different from its potential energy. Since P and z are different, the strain energy and consequently the elastic energy will also be different. If $P = (1 + \varepsilon)P_{cr}$ with ε is small enough for it to be permissible to write $1/\rho = y''$, we can obtain, in the limit, the critical load of the energy equation; it will be the value P when $\varepsilon = 0$.

In the case of the ideal model in Figure 2, we know that for loads $P = (1 + \varepsilon)P_{cr}$, in which ε is small enough, the equation of the elastic line will be:

$$y = f \cdot \sin \frac{\pi}{\tau} \cdot x$$

(we know how to clear up the indeterminateness of f , whose result is not determinate if the expression $1/\rho = y''$ is used; that indeterminateness can only be eliminated when ε is known).

We suppose that all the hypotheses made by the ideal model are fulfilled. Therefore, the load $P_{cr} (1 + \varepsilon)$ will strain the column by compression without any buckling. It is from this equilibrium position of the compressed column that the buckling will occur when we move the column from its equilibrium position and eliminate the cause that produces the disequilibrium.

If ε is small enough, f is small enough also and, because of the smallness of f and the slenderness of the column, the energy due to generic shear force $P \sin \theta$ will also be negligible. We only have left the variation of the potential elastic bending energy, which is zero at its initial position, therefore

$$\Delta U = \int_0^{\tau} \frac{M^2 dx}{2EI}, \text{ making } ds \sim dx$$

$$M = -P \cdot f \sin \frac{\pi}{\tau} x \quad \text{therefore} \quad U = \frac{P^2 f^2}{2EI} \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \tau = \frac{1}{4} \frac{P^2 \cdot f^2 \cdot \tau}{EI}$$

⁵ In other words, the spring formed by the flexed column has a stored strain energy that is greater than the energy needed to take load P to its initial position. The total energy of the system undergoes a variation:

$$\Delta E = P \cdot z - \Delta U$$

For $P \leq P_{cr}$ $\Delta E < 0$ the rectilinear equilibrium configuration was stable because E passes through a minimum.

On the other hand: $z = \tau - c$, in which τ is the length of the column and c is the chord of its elastic line, in other words:

$$z = \int_0^\tau (ds - dx)$$

$$ds - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

because $\frac{dy}{dx}$ is very small if ε is also.

Therefore:

$$z = \frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \simeq dx \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

In our case:

$$z = \frac{1}{2} f^2 \frac{\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\tau} \cdot \tau = \frac{1}{4} \cdot \frac{f^2 \pi^2}{\tau}$$

the critical load will be the solution of the equation:

$$\frac{1}{4} \frac{P^2 f^2}{EI} \tau = P \cdot \frac{1}{4} \cdot f^2 \cdot \frac{\pi^2}{\tau} \quad \text{therefore} \quad P = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\tau^2}$$

The usefulness of the energy method obviously does not lie in finding out in a more complicated way what we already know, but in showing that, with approximate procedures, sufficiently exact solutions can be found.

In fact, there are cases in which the integration of the differential equation:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$$

even in Euler's hypothesis, can be very complicated; using the energy equation and assuming expressions for the elastic line which, without being exact, approach the real one because of qualitative considerations, we obtain satisfactory results and begin to see, as well, the viability, in principle, of the method of successive approximations which we will explain below.

To see it, let us choose a deliberately erroneous form for the elastic line; let us suppose that:

$$y = \frac{4f}{\tau} \cdot \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)$$

$$M = \frac{4Pf}{\tau} \cdot \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)$$

therefore

$$\Delta U = \frac{16P^2f^2}{2\tau^2EI} \int_0^{\tau} x^2 \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)^2 dx = \frac{4}{15} \cdot \frac{P^2f^2\tau}{EI}$$

$$y' = \frac{4f}{\tau} \left(1 - \frac{2x}{\tau}\right)$$

$$z = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} y'^2 dx = 8 \frac{f^2}{\tau^2} \int_0^{\tau} \left(1 - \frac{2x}{\tau}\right)^2 dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{\tau}$$

therefore

$$\frac{4}{15} \frac{P^2f^2\tau}{EI} = \frac{8}{3} \frac{Pf^2}{\tau}$$

which gives

$$P = \frac{10}{\tau^2} \text{ instead of } \frac{\pi^2 EI}{\tau^2}$$

There is only a 1.3% error, which in practice, would give a more than adequate approximation. However, the parabola is a poorly-chosen curve because $y'' = \text{constant}$ instead of being zero at the joints⁶.

It is sufficient to choose a qualitatively more correct line with $y'' = 0$ at the joints and which is symmetrical with respect to the axis of the place to obtain greater precision. We are sure that the elastic line of a beam with a load at the middle of the span fulfills all these conditions. In this case:

$$y = 3f \left(\frac{3}{\tau} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{\tau^2} \right)$$

equation, valid for $x \leq \frac{\tau}{2}$

$$\Delta U = 2 \int_0^{\tau/2} \frac{M^2 dx}{2EI} = \frac{P^2f^2}{EI} \cdot \frac{17}{70} \cdot \tau$$

$$Pz = Pz \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\tau/2} y'^2 dx = \frac{12}{15} \cdot \frac{Pf^2}{\tau}$$

⁶ Upon assuming an elastic line, it would be a good idea to calculate ΔU base on $M = -Py$, instead of $M = -Ely''$ (this is the policy of very good textbooks such as Feodosiev).

In the graphic methods, this is the only sensible one because we know y , directly, not y'' ; but even when work with the expression of y , and are able to calculate y'' , the approximation obtained is less because the y chosen will differ in general less from the real y than the corresponding y'' from the real y'' .

Choosing the parabola as the curve, the error in the values of y is very small, the error in the values of y' is greater, varying from 30% at the joints, $(4f/\tau)$ for the parabola, $\pi f/\tau$ for the real elastic line, and zero at the column's axis. In spite of this, the approximation is very good (1.3%).

If we use the expression $M = -Ely''$ the error is much greater because y'' varies at the real elastic line from zero to

$$f \frac{\pi^2}{\tau^2} \sim 10 \frac{f}{\tau^2}$$

and at the supposed line always has a value of $\frac{8f}{\tau^2}$.

The error obtained using the parabola and the expression $M = -Ely''$ is approximately 20%.

therefore

$$P = \frac{168}{17} \cdot \frac{EI}{l^2}$$

The error drops to 0.13 %.

Therefore, using the expression $M = -Py$ for the moment of the deflected column, and supposing approximate expressions for y (even roughly approximate ones such as the parabola), we obtain values greater than the critical load but with a completely acceptable error for engineering purposes.

The fact that the real critical load is lower than the load obtained by choosing any elastic line can be proven as shown below but cannot be obtained just like that based on general principles.

“By using the energy method with an assumed curve satisfying the end conditions, we always obtain a value for the critical load which is higher than the true value. This follows from the fact that the actual deflection curve of a buckled bar is always the one that corresponds to the least resistance of the bar. Only by the merest chance will an assumed curve be the true curve of least resistance. Generally the assumed curve will be different from this curve of least resistance, thus giving values too high for the calculated critical loads. Working with an assumed curve is equivalent to introducing into the system some additional constraints which prevent the buckled bar from taking any other shape except that prescribed by the assumed curve. By introducing such additional constraints both the rigidity of the system and the critical loads can only be made larger.”

This line of reasoning is plausible and its consequences have been tested in practice, but it is not conceptually acceptable because it supposes applying general principles on equilibrium of systems to cases for which these principles are not applicable. The system subject only to the load $Pcr(1 + \delta)$ and the system subject to load P , compatible with an elastic line which is different from the real line, are not the same systems because forcing the column to have an elastic line different from the real line supposes, mechanically, adding forces that will carry the real elastic line to the theoretical one.

It can be shown directly that, for our ideal model in Figure 2, the critical load obtained by the energy equation passes through a minimum when the real expression for the elastic line is used.

To demonstrate this, we must remember that, for conservative systems such as those with which we are working by hypothesis, the total potential energy, sum of the outside or position energy, E_o , which corresponds to the loads applied to the system plus the internal or deformation load, U , depends only on the initial and final states. We also know that there is univocality between loads and the geometric configuration of the system (in the case of the deflected structure, which, given the load, the elastic line is unique). It is also true that for a state of stable equilibrium such as the equilibrium of the deflected structure, the total energy reaches a minimum. Later, the state of equilibrium of a conservative system in stable equilibrium is characterized by the condition $E_o + U$ minimum.

Let us suppose now that, beginning with the equilibrium position of the system, we assign displacement

dA (δA and dA in the direction of the P forces) to application points A of forces P , which have undergone displacement δA to reach equilibrium. We will have: $\Sigma P dA = dU$, therefore, $d \Sigma P \cdot \delta_A = dU$, which, in the case of a sole force, takes the form $d(P \cdot \delta_A) = dU$.

We will now consider an upright loaded column with a variable cross section and even a variable elasticity module, but with restrictions analogous to those of the model of Figure 2.

Let C be its rectilinear equilibrium configuration when the load is $P(1 + \varepsilon)$ (with ε as small as we like) and C' the configuration, also in equilibrium, very close to C , which the column takes when we move it from its equilibrium position and leave it to itself.

The elastic line corresponding to C' can always be represented by the function

$$y = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

with n sufficiently large, in which the values of f are appropriate functions of x and the values of a are constants to be determined

$$\text{We can put: } P \cdot \delta = P_0 \varphi_1(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

$$\text{Analogously: } dU = \varphi_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$Pcr = \frac{\varphi_2(a_1, a_2, \dots)}{\varphi_1(a_1, a_2, \dots)}$$

Configuration C is univocal with the value $Pcr(1 + \varepsilon)$ and has a stable equilibrium and, besides, for C' , the total energy is minimum; therefore, if I vary any of the coefficients a from the polynomial ai , the elemental variation of the total energy will be 0 hence

$$d_{ai}(\varphi_2(a_1, a_2, \dots) - Pcr \cdot \varphi_1(a_1, a_2, \dots)) = 0$$

therefore

$$\frac{\partial \varphi_2(a_1, a_2, \dots)}{\partial ai} - P_0 \cdot \frac{\partial \varphi_1(a_1, a_2, \dots)}{\partial ai} = 0$$

which we may summarize as follows:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - Pcr \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai} = 0$$

therefore

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai} = 0$$

therefore

$$\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai} = 0$$

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial ai} = \frac{\varphi_1 \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial ai} - \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial ai}}{\varphi_2}$$

therefore

$$\frac{\partial P_{cr}}{\partial ai} = 0$$

Then, when we choose the elastic line as the real, critical load calculated with the energy equation, it passes through a minimum and a maximum. It is clearly a minimum because, for elastic lines approaching the real load, we see that $P \sim P_{cr}$, but greater.

It is obvious that the foregoing demonstration, which we carried out based on the ideal model in Figure 2 in order to establish our ideas, is also valid for the case in which the column has other constraints besides joints A and B , and which, besides, can be conceptually generalized to another type of structures to which the energy equation can be applied.

SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD

There are cases, for example arches, in which the energy equation may not be applicable, as we will later see. The calculation of the critical load can then be carried out with the successive approximation method that we will set forth based on the example in Figure 8: A tubular steel column AB , which is 6 m. long and has a variable cross section, whose outside diameter at A is 10 cm., and 15 cm. at B , 6 mm. thick, jointed at A and B , and under conditions that are analogous to the ideal model in Figure 2. Our process will consist in finding P_{cr} , the load that coexists with a state of equilibrium that has an elastic line with a maximum rise, which in the hypothesis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ will be indeterminate.}$$

If the section were constant, we know that the elastic line would be a sinusoid passing through A and B with a maximum rise halfway up. The lower rigidity of the upper part of the column makes the point of maximum rise shift toward A . The stages of the process of successive approximations are the following:

1. We determine the probable value of P_{cr} from

$$I_{\text{average}} = \sqrt[5]{I_A \cdot I_M \cdot I_N \cdot I_P \cdot I_B} = \sqrt[5]{196.50 \cdot 282.52 \cdot 398.07 \cdot 536.90 \cdot 704.78} = 384.93 \text{ cm}^4$$

$$\text{With } E = 2.05 \cdot 10^6 \text{ K/cm}^2 \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI_{\text{average}}}{\tau^2} = 21634 \text{ K}$$

I take $P = 21600$ for reckoning.

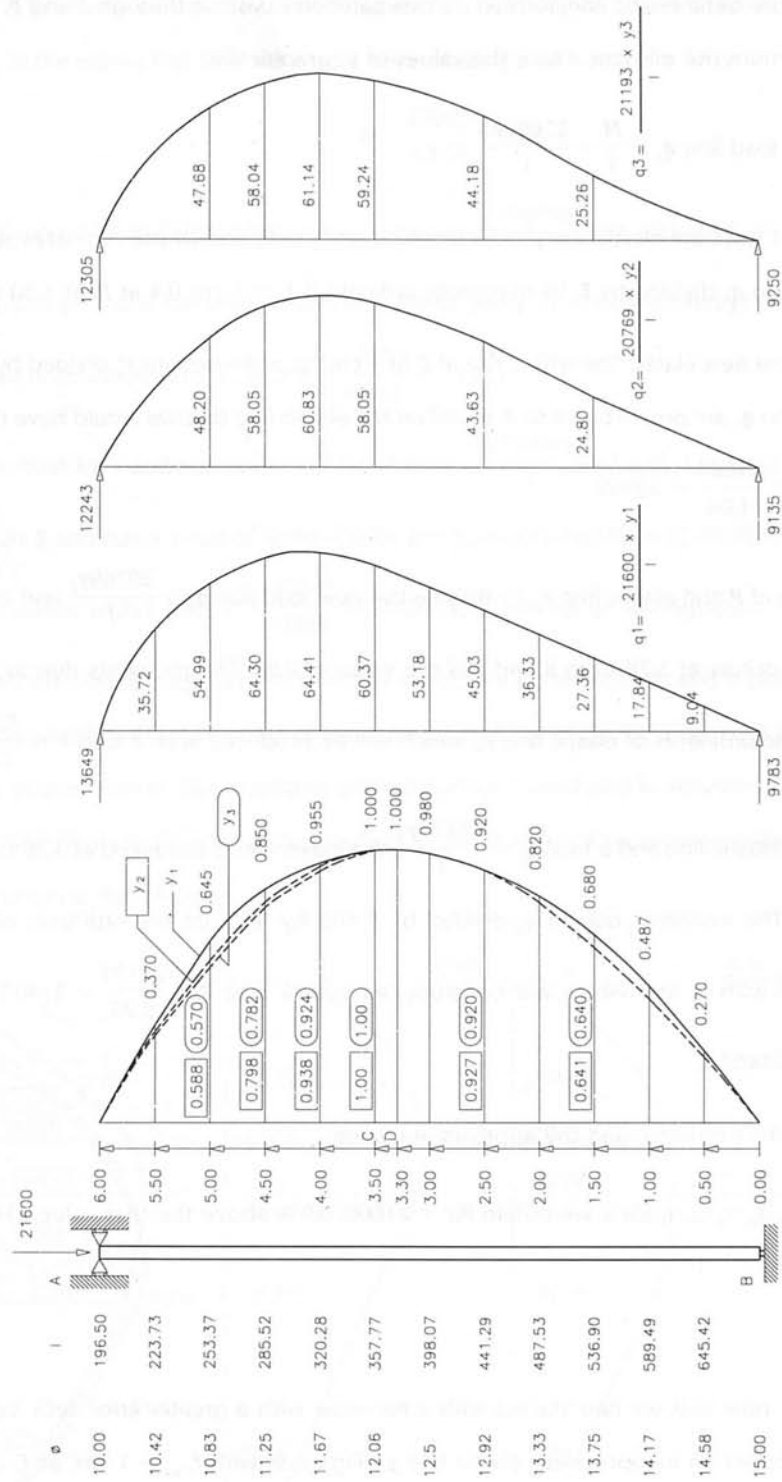


Figure 8

- NOTES:
1. The ordinates of the load lines are given in $K \cdot cm^{-3}$.
 2. The areas corresponding to these load lines are given in $K \cdot cm^{-2}$.
 3. The moments are in $K \cdot cm^{-1}$.
 4. To obtain the rises, these moments must be divided by $E \cdot Kcm^{-2}$. The result is the rise in cm.
 5. For the calculations, the load lines were considered to be polygons whose vertices have the ordinates indicated.

2. I assume y_1 is the basic elastic line, formed by two parabolas passing through A and B , with a chord at C , with a maximum rise of 1 cm. I take the values of y_1 graphically.
3. I calculate the load line $q_1 = \frac{M}{l} = \frac{21600y_1}{l}$.
4. With this load, I calculate elastic line y_2^* which corresponds to it, and whose ordinates are the moments corresponding to q_1 divided by E . Its maximum ordinate is $f_2 = 1 \text{ cm } 0.4$ at D , at 3.30 from B .
5. We take y_2 as the new elastic line with a rise at D of 1 cm. Its ordinates are y_2^* divided by 1.04. Since the moments due to q_1 are proportional to P , y_2 will be the elastic line that we would have obtained with y_1 and a force $P = \frac{21600}{1.04} = 20769$.
6. With this value of P and elastic line y_2 , I calculate the new load line $q_2 = \frac{20769y_2}{l}$ and with it y_3^* , whose maximum rise occurs at 3.28 from B and has the value of 0.98. The moments due to q_2 divided by E and 0.98 are the ordinates of elastic line y_3 , which will be produced with a load $P = \frac{20769}{0.98} = 21193 \text{ K}$.
7. I take y_3 as the elastic line and a load $q_3 = \frac{21193y_3}{l}$; the maximum is produced at 3.28 from B and has a value of 0.99. The moments due to q_3 divided by E and by 0.99 are the ordinates of elastic line y_4 , which coincide with y_3 and which will be produced with a load $P = \frac{21193}{0.99} = 21407$, therefore, the critical load is 21407 K.

Therefore, using Euler's formula, and the approximate value

$$I_{\text{average}} = \sqrt[5]{I_A \cdot I_M \cdot I_N \cdot I_P \cdot I_B} \text{ for } l, \text{ we obtain } Pcr = 21600; 0.9\% \text{ above the true value } 21407^7.$$

Example 2°

1. Let us suppose now that we had started with a Pcr value with a greater error, let's say 23000 K, and that we had chosen an inappropriate elastic line y_1 , Figure 9, with $f_{\text{max}} = 1 \text{ cm}$. at C , at 4 m. from B , formed by two chorded parabolas at C .
2. We load the column with $q_1 = \frac{23000y_1}{l}$ and calculate the elastic line y_2^* whose ordinates are the moments derived from q_1 divided by E ; its maximum ordinate in D at 3.37 from B has a value of 1.114.

⁷ For each "family" of problems, practical rules can be found that allow a sufficiently approximate value for Pcr to be found; however, to obtain these rules, the certainty that can be given by only the most exact processes (of which the processes explained here are an example) is indispensable.

3. We take y_2 as the new elastic line with a rise of 1 cm. at D , whose coordinates are those of y_2 divided by 1.114; y_2 is the elastic line that we would have obtained with y , and a force

$$P = \frac{23000}{1.114} = 20650$$

4. With this value of P and elastic line y_2 , I calculate $q_2 = \frac{20650y_2}{l}$ and with it y_3^* , whose maximum rise will occur at 3.29 on B and has a value of 0.963. Elastic line y_3 is obtained from y_3^* dividing its ordinates by

$$0.963 \text{ and is coherent with a force } P = \frac{20650}{0.963} = 21443.$$

5. With this value for P and elastic line y_3 , I calculate $q_3 = \frac{21443y_3}{l}$ and with it y_4^* , whose maximum rise reaches 3.28 on B and has a value of 0.995. Elastic line y_4 is obtained from y_4^* dividing its ordinates by 0.995

$$\text{and is coherent with a force } P = \frac{21443}{0.995} = 21551 \cdot y_4. y_4 \text{ cannot be distinguished from } y_3 \text{ in the drawing.}$$

Therefore, the critical load is 21551, to which elastic line y_4 corresponds and is practically the same as y_3 .

The values obtained in the two series of reckonings, 21407 and 21551, differ by 0.67%. This difference is due to the lack of precision of the graphic-analytical method⁸ used and is irrelevant for the solution of any actual problem. The final elastic lines corresponding to the 2 series of reckonings coincide with the undistinguishable differences in the drawing.

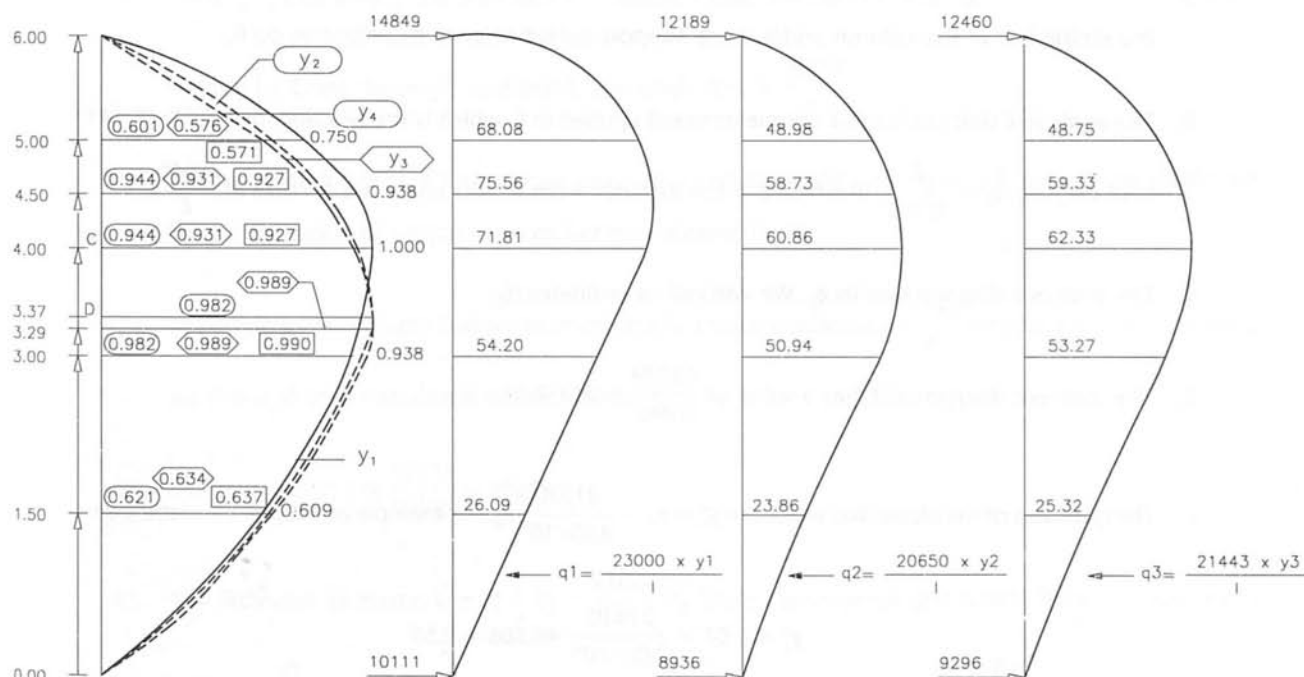


Figure 9

⁸ Which can be reduced at will by increasing the scale, the number of loads $q\Delta s$, and the number of figures with which to work.

Example Figure 10

Steel column ABC with a length $AC = 6$ m. formed by a tubular piece AB 5 m. long, ext. $\varnothing = 10$ cm., with a 6 mm. wall and a solid plinth BC , with $\varnothing = 10$ cm. at B and 20 cm. at C , jointed at A in a similar fashion to joint A of Figure 2 and encastered in C .

If the column had a uniform cross section, the configuration of the deflection would have an inflection point at $0.7 \cdot 6 = 4.20$ on A ; the greater rigidity of the plinth raises the inflection point, which we will suppose to be at 4 m. on A , obtaining the elastic line y_1 . We can obtain a first approximation to Pcr with Euler's formula.

$$\frac{\pi^2 \cdot 2.05 \cdot 10^6 \cdot 196.50}{4^2 \cdot 10^4} = 24850 \text{ K}$$

(because the inflection point falls in the part of the constant tubular section). To calculate Pc , we take y_1 as the initial elastic line of departure formed by a parabola with a rise 1 at D and a chord of 4 m., chorded at E , with another parabola with a vertical tangent at C . With this elastic line, I obtain q_1 . I calculate:

1. The reactions that, divided by E , are the angles at A and C . In particular, the angle at C has a value of $\frac{13779}{E}$.
2. The diagram of the moments of the column, supported only by A and C , which divided by E , gives us the elastic line of the column under these support conditions. Let its ordinates be θ_1 .
3. The angle in C that produces a unique moment applied in C , which is the reaction, divided by E , of the load diagram $q_0 = \frac{Z}{600 \cdot I}$, in which Z is the distance from A . This angle has a value of $\frac{0.646}{E}$.
4. The moment diagram due to q_0 . We will call its ordinates θ_0 .
5. The moment diagram at C has a value of $\frac{13779}{0.646} = 21330$.
6. The ordinates of the elastic line which are $y_2^* = \theta_1 - \frac{21330}{2.05 \cdot 10^6} \theta_0$. For example at the point 1 metre from A :

$$y_2^* = 1.07 - \frac{21330}{2.05 \cdot 10^6} \cdot 46.386 = 0.59$$

The elastic line corresponding to y_2^* is analogous to y_1 and has its maximum at D : 0.82. Therefore, the

elastic line $y_2 = \frac{y_2^*}{0.82}$, which corresponds to a force $\frac{24850}{0.82} = 30305$.

The results of these calculations are summarized in the following table:

Distance from A	θ_1	$\frac{21330}{2.05 \cdot 10^6} \theta_0$	y_2^*	y_2
100	1.068	0.483	0.585	0.711
200	1.700	0.877	0.823	1.000
300	1.743	1.095	0.648	0.787
400	1.310	1.048	0.262	0.318
500	0.672	0.65	0.024	0.029

The other values of y_2 , shown in Figure 10, are taken graphically.

7. I take y_2 as an elastic line and with $P = 30305$, I load the column with $q_2 = \frac{30305y_2}{l}$. The reactions, divided by E , are the angle at A and C; the angle at C is $\frac{16714}{E}$.
8. The moment diagram of the column, supported only by A and C, divided by E , gives us its elastic line for the condition of simple support. Let its ordinates be θ_2 .
9. The angle at C which the unitary moment applied there produces is $\frac{0.646}{E}$ and the ordinates due to q_0 are those already calculated, which we call θ_0 .
10. The moment at C is $\frac{16714}{0.646} = 25873$.
11. The ordinates of elastic line $y_3^* = \theta_2 - \frac{25873}{E} \theta_0$. Their maximum at D is 0.983. Therefore, the elastic line $y_3 = \frac{y_3^*}{0.983} \cdot y_3$ practically coincides with y_2 and corresponds to a force $\frac{30305}{0.983} = 30830$ which is the critical load.

The results of the second reckoning are summarized in the following table:

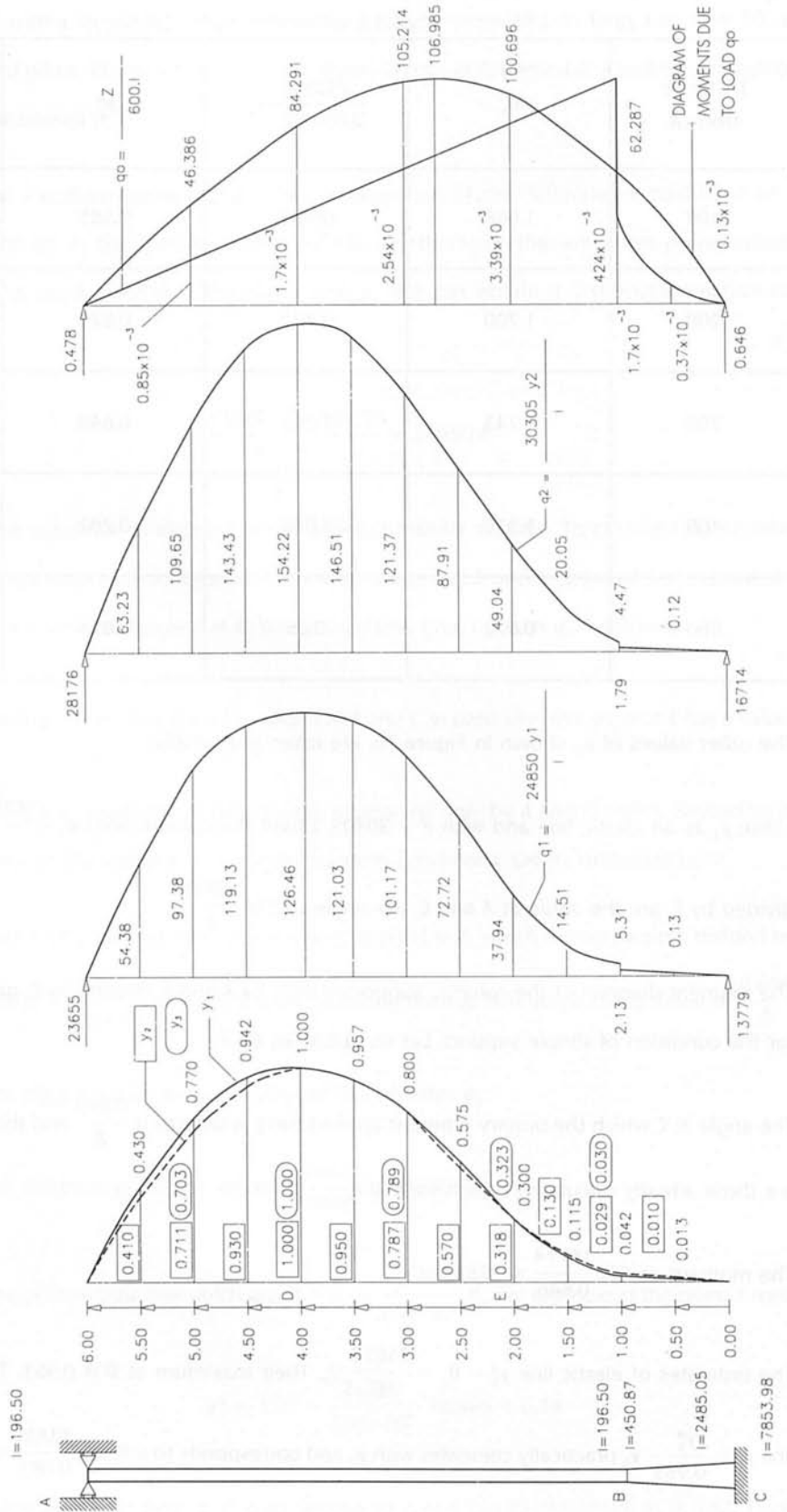


Figure 10

Distance from A	θ_2	$\frac{25873}{2.05 \cdot 10^6} \theta_0$	y_3^*	y_3
100	1.276	0.585	0.691	0.703
200	2.047	1.064	0.983	1.000
300	2.104	1.328	0.776	0.789
400	1.589	1.271	0.318	0.323
500	0.815	0.786	0.029	0.030

12. Taking the value of the critical load, assuming that the moment at C is proportional to P (which is not certain, but, given the small variation of P to go from y_3^* to y_3 , it can be taken as an approximation) which would give us the value

$$\frac{25873}{0.983} = 26320$$

and the elastic line y_3 , we can calculate the zero moment point, which occurs at 3.60 from A. A critical load of

$$\frac{\pi^2 \cdot 2.05 \cdot 10^6 \cdot 196.5}{3.6^2 \cdot 10^4} = 30677$$

would correspond to this section of column, which works as if it were two-jointed (Figure 11). This value differs from the value obtained previously, 30830, by only 0.5%.

GENERAL OBSERVATION

The successive approximation method has three virtues which we consider essential:

- Its universality.
- The fact that it allows us to “touch” the physical realities analysed in deflection in a manner which, at times, causes the abstraction present in the classical approaches to the problem to vanish.
- Its simplicity and relatively quick execution. We must bear in mind that in the examples given here, we have exaggerated the convergence, for didactic reasons, reaching extremes that are unnecessary from the technical point of view.

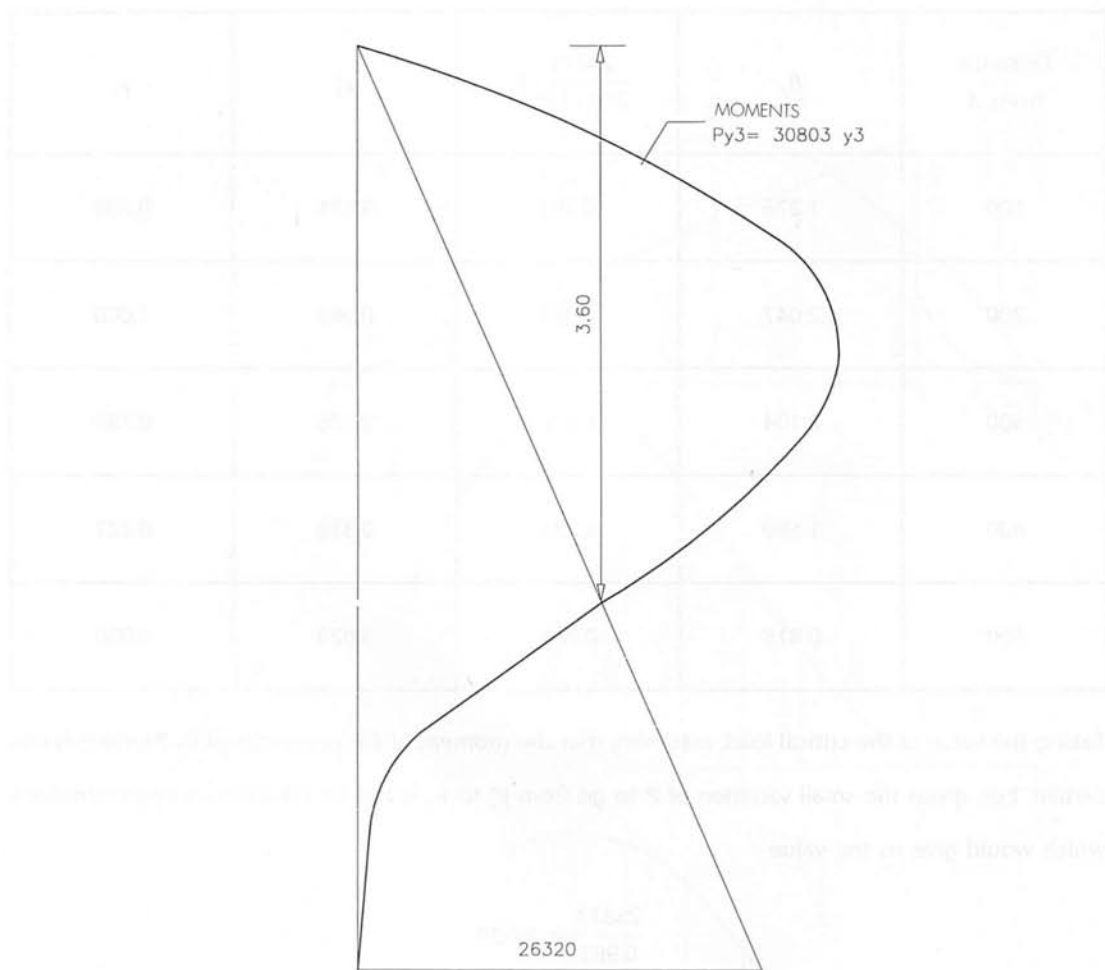


Figure 11

In the three previous examples, convergence is immediate, as always occurs if the original elastic line has been well chosen, which supposes that for a column in the conditions of the ideal model in Figure 2,

1. It is a curve on the least rigid plane of the column.
2. Its concavity always faces the negative values of y as in Figure 2.
3. There is continuous variation in its curvature.

To save work, it is also a good idea to take into account that the variation of the cross section (including its possible discontinuities) does not bring about substantial variations in the form of the elastic line (for example, the position of its maximum rise point) in comparison with that which it would have if the section were constant.

It has not been possible for me to express, in precise mathematical language, the conditions that should be fulfilled, even in the simple case of Figure 2, to produce the rapid convergence that the previous exercises show.⁹

However, the need for this convergence for curves whose form approaches closely that of the successive elastic lines obtained in the reckonings can be shown.

⁹ I have submitted the problem to the Laboratory of Mathematics at the Engineering School, which has undertaken its study, but there are still no results.

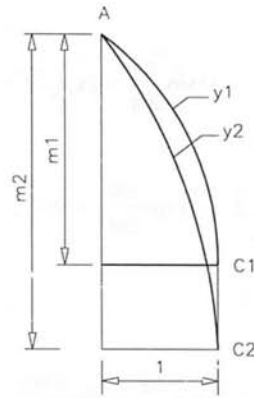


Figure 12

In fact:

Let us consider two branches, y_1 and y_2 with two elastic lines with a vertical tangent at the distances m_1 and m_2 from joint A . To be consistent with the mechanics of reckoning adopted, we suppose a rise of one at the points C which have vertical tangents (Figure 12).

We suppose that

$$y_1 = a_{11} \sin \frac{\pi x}{2m_1} + a_{31} \sin \frac{3\pi x}{2m_1} \quad (8)$$

$$y_2 = a_{12} \sin \frac{\pi x}{2m_2} + a_{32} \sin \frac{3\pi x}{2m_2} \quad {}^{10}$$

The reader can verify that the following is true:

$$\left| \frac{y_1 - y_2}{y_1} \right| < \left| \frac{y_1'' - y_2''}{y_1''} \right| \quad (9)$$

and the operations are sufficient for

$$\frac{m^2}{2} < m_1 < m_2$$

This proof is greatly improved by the considerations that follow:

As we have seen in the examples, the distances m_i from the points C_i on the vertical tangent, to joint A are practically the same for original curves that fulfill the three conditions we specify. Even when we incorrectly choose the initial distance m_1 (Example 2), the following distances, m_2, m_3, \dots , practically coincide. Supposing that in equation (8) $m_1 = m_2 = m$, it is easy to prove that (9) is true. In fact:

For $x = m$, $y_1 = 1$, therefore, $a_1 + a_3 = 1$. If for

$$x = \frac{m}{2} \quad y_1 = \alpha_1 \quad a_1 + a_3 = \alpha_1 \sqrt{2}; \quad a_1 = \frac{\alpha_1 \sqrt{2} + 1}{2} \quad a_3 = \frac{\alpha_1 \sqrt{2} - 1}{2}$$

¹⁰ The reader can see that, adequately choosing the coefficients, the difference between the ordinates of any elastic line and those obtained with the y curves is around 2%.

Then

$$y_1 = \frac{1}{2} \left[(\alpha_1 \sqrt{2} + 1) \sin \frac{\pi x}{2m} + (\alpha_1 \sqrt{2} - 1) \sin \frac{3\pi x}{2m} \right]$$

$$y_1'' = -\frac{\pi^2}{8m^2} \left[(\alpha_1 \sqrt{2} + 1) \sin \frac{\pi x}{2m} + 9(\alpha_1 \sqrt{2} - 1) \sin \frac{3\pi x}{2m} \right]$$

If for $x = \frac{m}{2}$, $y_2 = \alpha_2$:

$$u = \frac{y_1 - y_2}{y_1} = \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2) \left(\sin \frac{\pi x}{2m} + \sin \frac{3\pi x}{2m} \right)}{\sqrt{2}\alpha_1 \left(\sin \frac{\pi x}{2m} + \sin \frac{3\pi x}{2m} \right) + \sin \frac{\pi x}{2m} + \sin \frac{\pi x}{2m} - \sin \frac{3\pi x}{2m}} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Where

$$\beta = \frac{\sin \frac{3\pi x}{2m}}{\sin \frac{\pi x}{2m}}$$

Proceeding analogously, it can be seen that

$$u_2 = \frac{y_1'' - y_2''}{y_1''} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - 9\beta}{1 + 9\beta}}$$

Therefore:

$$v = \frac{|u_2|}{|u|} = \frac{\left| \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - 9\beta}{1 + 9\beta} \right|}{\left| \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|}$$

In Figure 13 and for different values of x , we have shown $v(\alpha_1)$.

From the analysis of the diagrams (for curves representing functions such as (8), which can differ very little from any possible elastic line; for the values of x studied and for all those that the reader can test) it can be seen that v is > 1 ¹¹. Therefore, supposing that the real elastic line is also in the form (8) and considering any curve representative of a function of form (8), the error committed in the ordinates is less than that committed in its second derivative. However:

$$\text{error of } y_{n+1}'' = \text{error of } y_n$$

$$\text{error of } y_{n+1}'' > \text{error of } y_n^{+1}, \text{ therefore}$$

$$\text{error of } y_{n+1} < \text{error of } y_n, \text{ therefore}$$

¹¹ For $x \rightarrow m$ $\beta \rightarrow -1$ and the numerator of $v \rightarrow \infty$, for every x tending to $v \gg 1$.

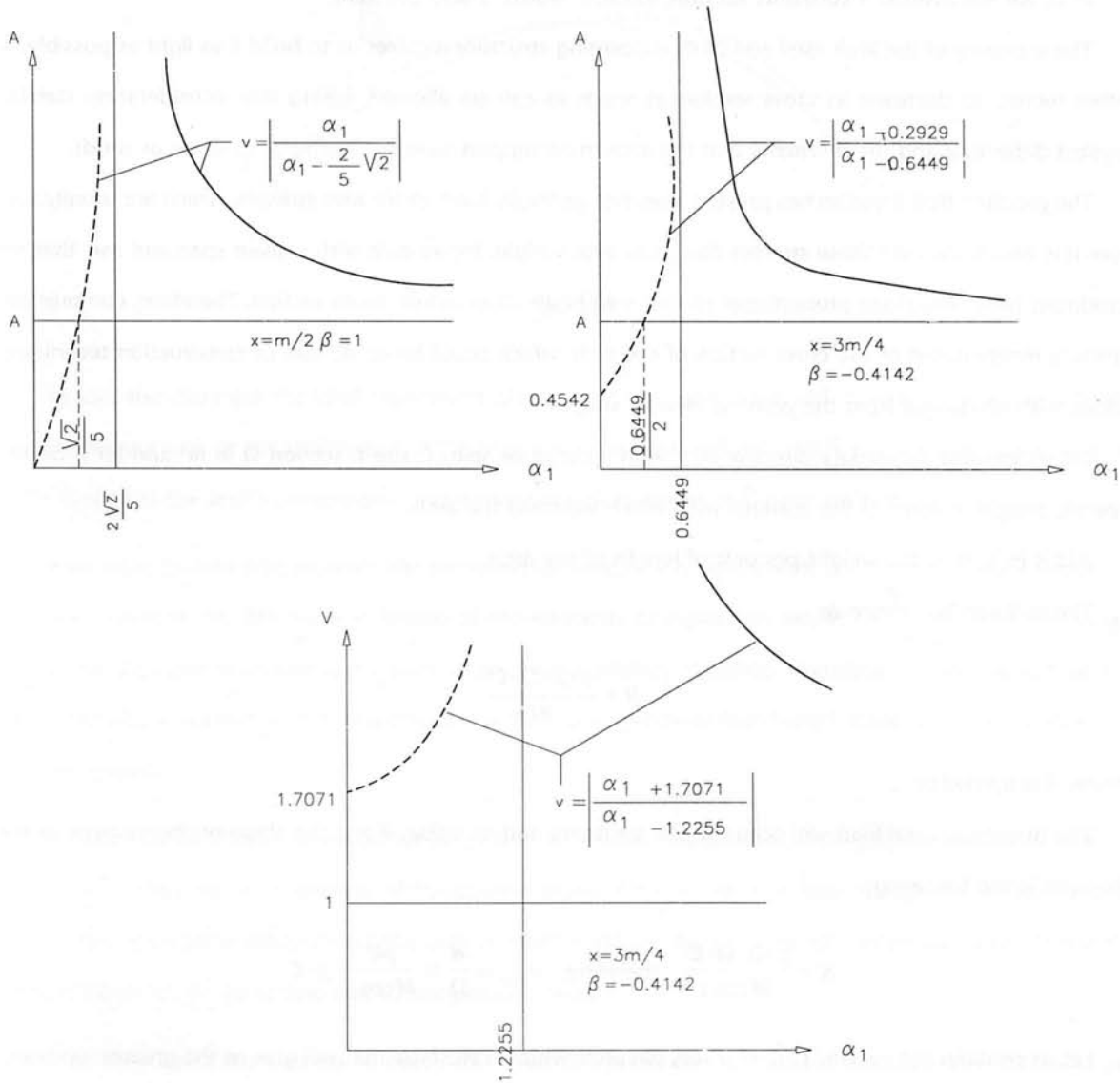


Figure 13

with the limitations stated above, there must be convergence for curves representing functions such as (8), using the procedure of successive approximations from previous exercises.

I only need to add that I know (and understand very well) that it will usually be considered unnecessary to analyse the reasons for a convergence which is seen to occur in the process of working in a manner we could call experiential.

CRITICAL LOADS OF CATENARY DIRECTRIX ARCHES LOADED WITH THEIR OWN WEIGHT

The calculation of this critical load is the first and principal problem of the calculation of catenary directrix arches, often used in wide-span roofs; calculation experience proves, in fact, that suitable protection against deflection gives a structure that will behave well under the different stresses of its own weight.

First, we will assume a **constant section**, in other words, Ω also constant.

The economy of the arch itself and of its supporting structure requires us to build it as light as possible, in other words, to decrease its cross section as much as can be allowed, taking into consideration stability against deflection and the moments that the arch must support (due, for example, to snow or wind).

The problem that these arches present does not generally have to do with stresses, which are usually very low. It is easy to analyse those stresses due to its own weight, for an arch with a given span and rise, that are produced by an axial load proportional to that weight, in other words, to its section. Therefore, compression stress is independent of the cross section of the arch, which could be as slender as construction techniques allow, with no danger from the point of view of stress.

Let us imagine a catenary directrix arch with a chord or span C , rise f , section Ω in m^2 and let ρ be the specific weight in K/m^3 of the material with which we build the arch.

$\rho \Omega$ is in $K/m \cdot \tau$, the weight per unit of length of the arch.

Thrust H can be written as

$$H = \frac{\beta \cdot \rho \cdot \Omega \cdot C^2}{8f}$$

where β is a number.

The maximum axial load will occur at the springing and its value, if α is the slope of the tangent to the directrix, is the following:

$$N = \frac{\beta \cdot \rho \cdot \Omega \cdot C^2}{8f \cos \alpha} \quad \text{therefore} \quad \sigma_{\max} = \frac{N}{\Omega} = \frac{\beta C^2}{8f \cos \alpha} \cdot \rho \cdot C$$

Let us consider the specific case of a very flat arch, which is the type that will give us the greatest stresses:

To get an idea, let $\frac{C}{f} = 10$, which gives: $\frac{1}{\cos \alpha} \sim 1,08$.

For flat arches such as the one we are considering, $\beta \sim 1$, therefore:

$$\sigma_{\max} = 1,08 \cdot 1,25 \cdot \rho \cdot C = 1,35 \rho \cdot C$$

Supposing

$$\rho = 2000 \text{ K/m}^3 \quad \text{and} \quad C = 100 \text{ m}$$

$\sigma_{\max} = 270000 \text{ K/m}^2 = 27 \text{ K/cm}^2$, which is a small stress for the materials normally used.

The foregoing clearly shows us how the decisive factor in the sizing of these arches will be their resistance to flexures, concurrent with the axial load.

Let us consider a two-jointed catenary directrix arch (Figure 14) with a constant cross-section, loaded with its own weight. Under ideal conditions (analogous to those established for the two-pivoted column in Figure 2), the resistance line coincides with the directrix; therefore, all the sections work under simple compression.

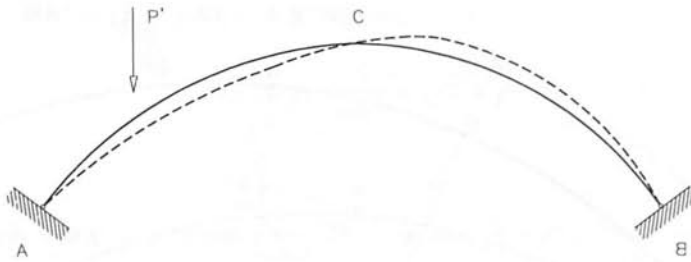


Figure 14

We can also carry out the ideal experiment of increasing the load of the arch so that it is always uniformly distributed per unit of expansion, and, if the ideal conditions are fulfilled, and if we suppose, as we have up until now, that the arch's compression strains are negligible, the arch will not deflect.

If we were to take into account the compression strains, the equilibrium configuration would not be a catenary because the difference in length of the elements of expansion would not conform to that which would be deduced from the expression of the initial catenary directrix. Therefore, flexures would appear once the arch is loaded, and would increase as the load, uniformly distributed according to the expansion, was increased.

This is an observation that should be made but not unduly analysed because, even ignoring the compression strains, there are, as in the case of the column, many other causes that make the ideal case unattainable, and whose disruptive influence on the arch is much stronger than that which would be derived from the modifications of the centerline due to compression strains.

As in the case of the column, to clarify the ideas, it is preferable to suppose that the ideal conditions are fulfilled and to separate the arch from its equilibrium position with a force P' .

We remove P' . We say that the arch deflects when, removing P' , it does not return to its initial equilibrium configuration; in other words, when a new equilibrium configuration exists with a stable equilibrium, compatible with the strained arch.

To continue our study, we need to obtain the ratio between the strain of the arch and the stress; concretely, the moment applied, whose effect is decisive and is the only one we will consider.

AB , Figure 15, will be a section of arch that can flex or deflect on the plane of the drawing, which is also the plane of symmetry of the cross section of the arch. x is the curvilinear abscissa that defines the position of the generic element MN , with an initial length $\rho_0 \cdot d\theta = dx$. By hypothesis, the spring, point A of figures 14 and 15, is common to the initial and final configurations of the arch.

MC and NC are the normals at M and N for arch AB . $M''N''$ will be the final position of element MN .

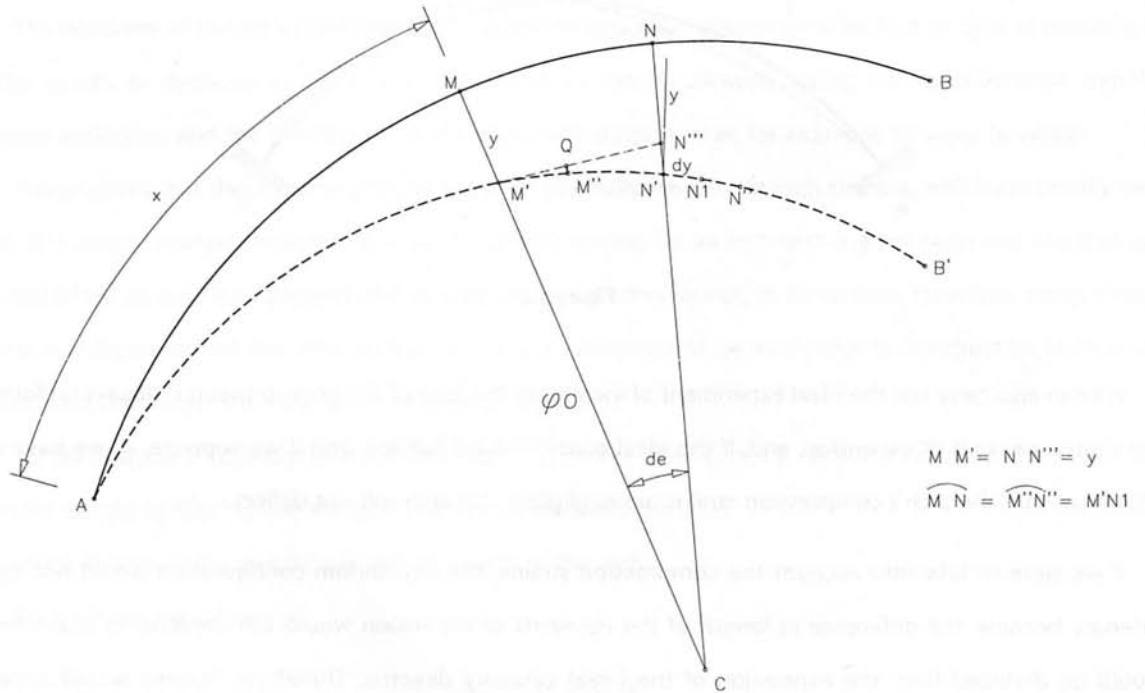


Figure 15

If M'' is the intersection of elastic line AB' with MC , we know that $M'M''$ is small in comparison with $MM' = y$, on the order of dy ¹².

If over AB' , we take N_1 , such that $\widehat{M'N_1} = \widehat{M''N''}$ ($=\widehat{MN}$ considering only bending strains), the curvature of element $M'N''$ differs little from that of element $M'N_1$. We will suppose they are the same.

On the other hand, we can, with an error on the order of dy , suppose that N_1 coincides with N' , which is the intersection of NC with AB' .

We will call the ordinate of elastic line $MM' = y$.

If ρ is the radius of the curvature of the element MN after the strain:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + \Delta z d\theta}{dx + \Delta dx}$$

¹² In fact, if Q is the intersection of the parallel to MC through M'' with $M'N''$, and indicating with the sign \sim that the values that separate it are on the same order:

$$\frac{M'M''}{x} \sim \frac{M''Q}{y}$$

$$\frac{M''Q}{dy} \sim \frac{y}{x}$$

therefore

$$M'M'' \sim \frac{x}{y} \frac{y}{x} dy$$

therefore

$$M'M'' \sim dy$$

Let $N''N = MM' = y$; $M'N'' = (\rho_0 - y) d\theta$; $\sphericalangle N''M'N' = \gamma$

$$\operatorname{tg} \gamma = y'; \quad \frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + y'^2}$$

therefore,

$$dx + \Delta dx \sim M'N' = (\rho_0 - y) d\theta \frac{1}{\cos \gamma} = (\rho_0 - y) d\theta \cdot \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\rho_0 - y}{\rho_0} dx \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

The angle swept by section M as it passes from M to M' is γ , whose tangent is dy/dx ; the tangent of the angle swept by section N as it passes from N to N' will be:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx$$

Therefore:

$$\begin{aligned} \Delta d\theta = \operatorname{tg} \Delta d\theta &= \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx - \frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx\right) \frac{dy}{dx}} \\ d\Delta + \Delta d\theta &= d\theta + \frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{1 + y'^2} \end{aligned}$$

Therefore:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{\frac{\rho_0 - y}{\rho_0} dx \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y}$$

The variation of the curvature when we pass from NM to $M'N'$ will be:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} &= \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{(\rho_0 - y) \sqrt{1 + y'^2}} - 1 \right) + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \\ \frac{\rho_0}{\rho_0 - y} &= \frac{\rho_0(1 - \sqrt{1 + y'^2}) + y \sqrt{1 + y'^2}}{\rho_0(\rho_0 - y) \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_0 - y} \end{aligned}$$

In our case, we will be able to write with close approximation:

$$\rho_0 \sim \rho_0 - y, \quad \text{therefore,} \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\rho_0(1 - \sqrt{1 + y'^2}) + y \sqrt{1 + y'^2}}{\rho_0^2 \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

If AB is initially a straight line, the following known expression is obtained:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

If the strains are very small $y' \sim 0$, therefore:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{y}{\rho_0^2} + \frac{d^2y}{dx^2}$$

We will now prove that the variation of the curvature has a value of $-\frac{M}{EI}$ if we accept the approximation

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta}$$

the consequence of considering the length of the element, in other words, only strains by bending.

For example: Let us consider an arch segment, (Figure 16) with an initial length $\rho_0 d\theta$, subjected to pure bending with a moment M , acting upon the plane of the figure, which is the main plane of the arch's section. The strain due to M carries the initial curvature $1/\rho_0$ to the final $1/\rho$.

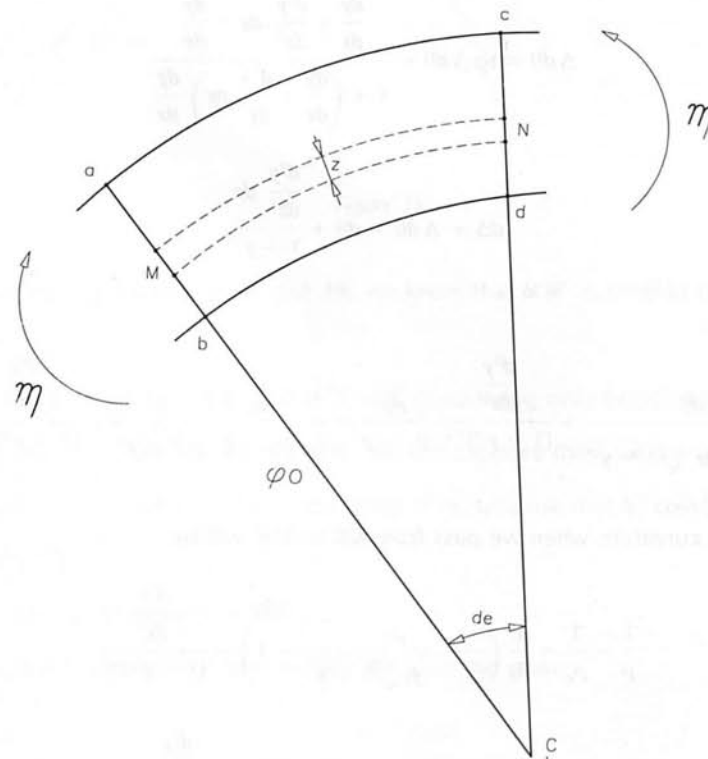


Figure 16

Granting that the plane sections, which are planar before bending, remain planar afterwards (a sufficiently exact hypothesis, even for curved bars, which is not the case of the arches that are weakly-curved bars), we have:

Strain per unit of length of the fibres at a distance z from barycentric fibre MN , whose initial length is $(\rho_0 - z) d\theta$:

$$\varepsilon = \frac{z \cdot \Delta d\theta}{(\rho_0 - z) d\theta}, \text{ por tanto, } \sigma_z = \frac{E \cdot z \cdot \Delta d\theta}{(\rho_0 - z) d\theta}$$

Supposing that the longitudinal stresses between these fibres are zero, which is, in the case of bending, close enough even for strongly curved bars (which is not our case):

$$dM = \sigma_z \cdot z dA, \text{ where } dA \text{ is the element of area of the cross section.}$$

Therefore:

$$|M| = E \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \int_A \frac{z^2 dA}{\rho_0 - z}$$

In the cases which are of interest to us $\rho_0 - z \sim \rho_0$,

$$|M| = E \frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta} \int_A z^2 dA = EI \frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta}$$

$\frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta}$, is the variation of the curvature if we suppose the length of element MN is invariable. On the other hand,

if we consider positive the sign of the moment that appears in Figure 12,

$$\frac{\Delta d\theta}{\rho_0 d\theta} \simeq \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{M}{EI}$$

The equation that is characteristic of the elastic line of the arch will be:

$$\frac{\rho_0(1 - \sqrt{1 + y'^2}) + y\sqrt{1 + y'^2}}{\rho_0^2 \sqrt{1 + y'^2}} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI}$$

and if $y' \sim 0$ takes the form:

$$\frac{y}{\rho_0^2} + \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \text{ equation obtained by Bousinesq.}$$

Adopting the first of these last two equations is equivalent to considering the complete expression of the curvature in the study of the buckling of a column; adopting the second is the same as making a hypothesis equivalent to that of Euler.

The results obtained, using the last equation, are exact from the point of view of obtaining the critical load. We will then form, in the following, the hypothesis that y is very small in comparison with τ , and that $y' \sim 0$.

Let us consider the catenary directrix arch (Figure 17), which is deflecting along the elastic line drawn with a dotted line. $2 \cdot \tau$ is the expansion of arch ACB .

Let S be a generic section of the arch, for which y is the ordinate of the elastic line measured along the norm to the directrix. We will suppose y to be very small in comparison with τ ; consequently, the "macrogeometry" of the arch and its resistance-line do not change. Therefore, this resistance-line continues to coincide with the directrix of the arch that is not deflected. If the value of the axial load at S is N , the generic moment will have a value, according to the established sign conventions $+Ny$.

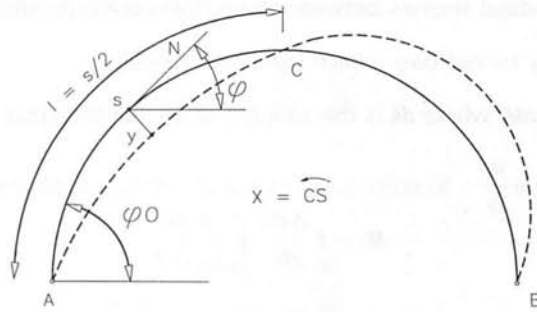


Figure 17

If ρ_c is the radius of the curvature at the pendant, and q is the load per unit of development of the arch:

$$H = \rho_c \cdot q$$

In the catenary: $N \cos \varphi = H$, therefore, $N = \frac{\rho_c}{\cos \varphi} \cdot q$

$$x = \overrightarrow{CS} = \rho_c \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\frac{x^2 + \rho_c^2}{\rho_c^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \text{ therefore, } \frac{\rho_c}{\cos \varphi} = \sqrt{x^2 + \rho_c^2}, \text{ therefore, } N = q \sqrt{x^2 + \rho_c^2}$$

The generic bending radius of the directrix is:

$$\rho_0 = \frac{\rho_c}{\cos^2 \varphi} = \frac{x^2 + \rho_c^2}{\rho_c}$$

Therefore, in value and sign:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q}{EI} \cdot y \sqrt{x^2 + \rho_c^2} - \frac{\rho_c^2 \cdot y}{(x^2 + \rho_c^2)^2} \quad (6)$$

Let $\gamma = \frac{1}{\text{tg } \varphi_0}$, $\rho_c = \gamma \cdot \tau$, $v = \overrightarrow{AS}$, therefore, $x = \tau - v$

$$\frac{d^2y}{dv^2} = -\frac{q}{EI} \cdot y \sqrt{\gamma^2 \tau^2 + (\tau - v)^2} - \frac{\gamma^2 \cdot \tau^2 \cdot y}{[\gamma^2 \cdot \tau^2 + (\tau - v)^2]^2}$$

and if, finally, $u = \frac{v}{\tau}$, the previous equation is written as:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -\frac{q\tau^3}{EI} \cdot y \sqrt{\gamma^2 + (1 - u)^2} - \frac{\gamma^2 \cdot \tau^4 \cdot y}{\tau^4 [\gamma^2 + (1 - u)^2]^2}$$

which we put into the form:

$$\frac{d^2y}{du^2} = -\chi \cdot y \sqrt{\gamma^2 + (1 - u)^2} - \frac{\gamma^2 y}{[\gamma^2 + (1 - u)^2]^2} \quad (6')$$

with u ranging from 0 to 2 and $\chi = \frac{q\tau^3}{EI}$.

Our problem will be, for each γ , (that, given τ , defines the directrix) to calculate χ ; knowing χ , the critical load will be:

$$q = \chi \frac{EI}{\tau^3}$$

To calculate χ , let us begin, simply because it is easier to draw, by rectifying arch ACB (Figure 18).

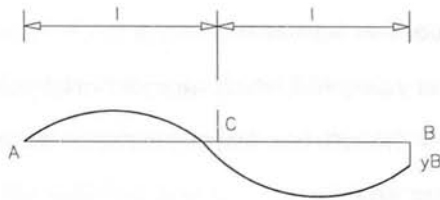


Figure 18

The only way to integrate the differential equation of the elastic line is by computation. In order to do so, we will choose γ , with which we will define the directrix.

For each value that we choose for χ , and for $u = 2$, we will obtain an ordinate y_B for $u_0 = 2$ (in general different from 0), with which we can establish a one-to-one correspondence between y_B and χ , defining the function $y_B(\chi)$. We calculate the roots of this function and, for each of these roots, we draw the corresponding elastic line.

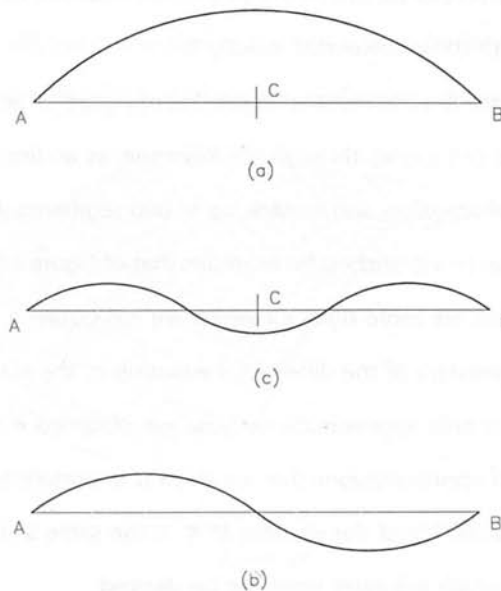


Figure 19

For the three first roots, the elastic lines have the forms drawn in Figure 19 (a), (b), (c). Figure 19 (a), which corresponds to the least of these roots, is not, mechanically, the solution of the problem. It would assume that all values of y are positive or negative, which is not possible without a lengthening or shortening of the arch, which is incompatible with the fact that the deflection is a bending strain that does not modify the shape of the arch. Compression strain, due to an axial load, is independent of the deflection and prior to it.

Figure 19 (b) corresponds to the elastic line that is diagrammed in Figure 17 and the corresponding χ is the one being searched for because it is the least of those that, being the roots of a function y_B , are mechanically possible.

Elastic line 19 (c) is, in principle, possible, but, we should say, infinitely improbable. For a χ , in other words, for a load q much less than that corresponding to elastic line 19 (b), a deflected elastic line is possible, and a deflected elastic line would be produced when the arch leaves its initial equilibrium position for any of the factors which, in reality, may produce that separation.

The hypothesis that the values of y are small, which we could call, by analogy, Euler's hypothesis, leads us to a solution that, as in the case of the columns, leaves the rise of the elastic line indeterminate, which is mechanically illogical and contrary to experience.

Our solution tells us that there are deflected elastic lines only for the values of χ , roots of the function $y_B(\chi)$; in other words, the arch would deflect for the value of χ corresponding to elastic line 19 (b), but not for a value between this and the value corresponding to elastic line 19 (c), which is absurd and contrary to experience.

We could make considerations and expansions analogous to those made for the columns and even solve the corresponding differential equation for the elastic line in the hypothesis $y' \neq 0$, but we do not think it is necessary because it would not add anything conceptually to what was said then. On the other hand, in real problems, flexures always coexist with axial loads; so that no great strains occur, we should use a safety factor with respect to the critical load which, as we saw in the case of the columns, makes the moments calculated in the Euler hypothesis coincide with those calculated exactly¹³.

We believe it is important to see directly that the elastic line of Figure 17 and 19 (b) is the most unfavourable of those possible. This elastic line passes through the keystone, as an immediate result of the symmetry, with respect to C , of its differential equation, and is made up of two segments, AC and CB , with the same length τ . Every elastic line with more than two branches, for example, that of Figure 19 (c) will give us segments of an arch with a length less than τ , that are more rigid, for which we will obtain a necessarily larger critical load.

As we said, as a result the symmetry of the differential equation of the elastic line, this elastic line passes through keystone C . This result is only approximate because we obtained it from a differential equation at which we arrived after a series of approximations that we think is important to summarize. We assumed:

1. (Figure 15) that the curvature $1/\rho$ of the element $M''N''$ is the same as that of the element $M'N'$. This is the approximation from which a greater error can be derived.
2. $\rho_0 \sim \rho_0 - y$, approximation that does not introduce an error, because we can suppose that y is as small as we want it to be.
3. Negligible y' , approximation of the same nature as the previous one.
4. (Figure 16) that $\rho_0 \sim \rho_0 - z$.

¹³ (However, they are greater than those applied directly. See "Summary of the Results up to Now" on page 28 and "Concurrence of Axial Loads and Bending in Arches" on page 137.)

5. That when the arch deflects, N does not vary and the shear is negligible, which is as exact as we want because we can make the ordinate y arbitrarily small.

It is easy to see, however, that the elastic line cannot pass through C :

1. Geometrically: A brief examination of Figure 17 shows us that, if the elastic line passes through C , then point C of the arch, before deflection, must be, after deflection, to the right and above C . But, if this occurs, the differential equation is not symmetrical; therefore, the elastic line cannot pass through C .
2. Energetically: If the elastic line passes through C , and taking into account the symmetry of its differential equation, the ordinates of the symmetric points with respect to C will be the same. Therefore, there would be no variation in the potential energy of position necessary to supply the potential strain energy of the deflected arch; consequently, the elastic line cannot pass through C .

Therefore, the result (which is very important) that the elastic line goes through C , is, as we were saying, only approximate, but with an approximation that is certainly very close if the values of y are very small in comparison with τ .

In case the longitudinal section of a vault is wave shaped from a maximum at the keystone to zero against the strength-giving elements at the edge (Figure 20)¹⁴, so that all the cross sections are catenaries with parallel ends on a horizontal plane and variable rises, we calculate its critical load using equation (6) in which I is now a function of x . To calculate I , in each of the sections into which we divide the arch in order to numerically integrate equation (6), we define the wave amplitude of the keystone, wherewith the amplitudes and consequently the moments of inertia in all the other sections are defined¹⁵.

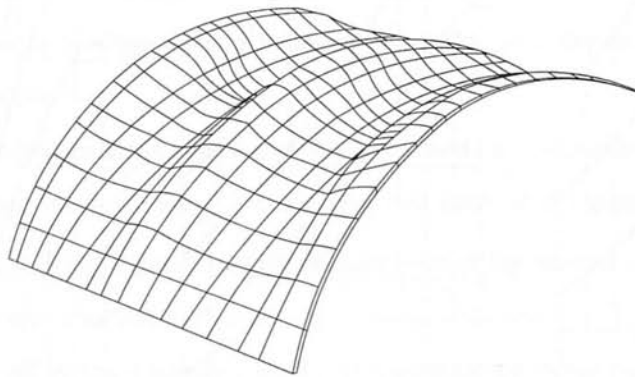


Figure 20

¹⁴ According to the structural form described in the article already mentioned entitled "Forms".

¹⁵ For I , we use a very approximate expression, if a is small in comparison with τ (in practice, the following has always been true: $a < \tau/10$)

$$I = \frac{\tau e a^2}{8} + I_{\text{own}}$$

τ = wave width.

a = wave amplitude of the keystone.

e = equivalent thickness; the same as the thickness if the vault is solid, and the same as the thickness of the same area if the vault is built with hollow pieces.

I_{own} is the sum of the moments of inertia of the different elements into which we divide the wave. If the arch is solid:

$I_{\text{own}} \sim \frac{e h^3}{12}$; if the longitudinal section has holes, the meaning of I_{own} is obvious.

Once the previously explained integration process has been repeated, we show all its results in the assemblage of curves in Figure 21, which give χ for each γ and for each ratio

$$\gamma = \frac{l_{\text{keystone}}}{l_{\text{spring}}}$$

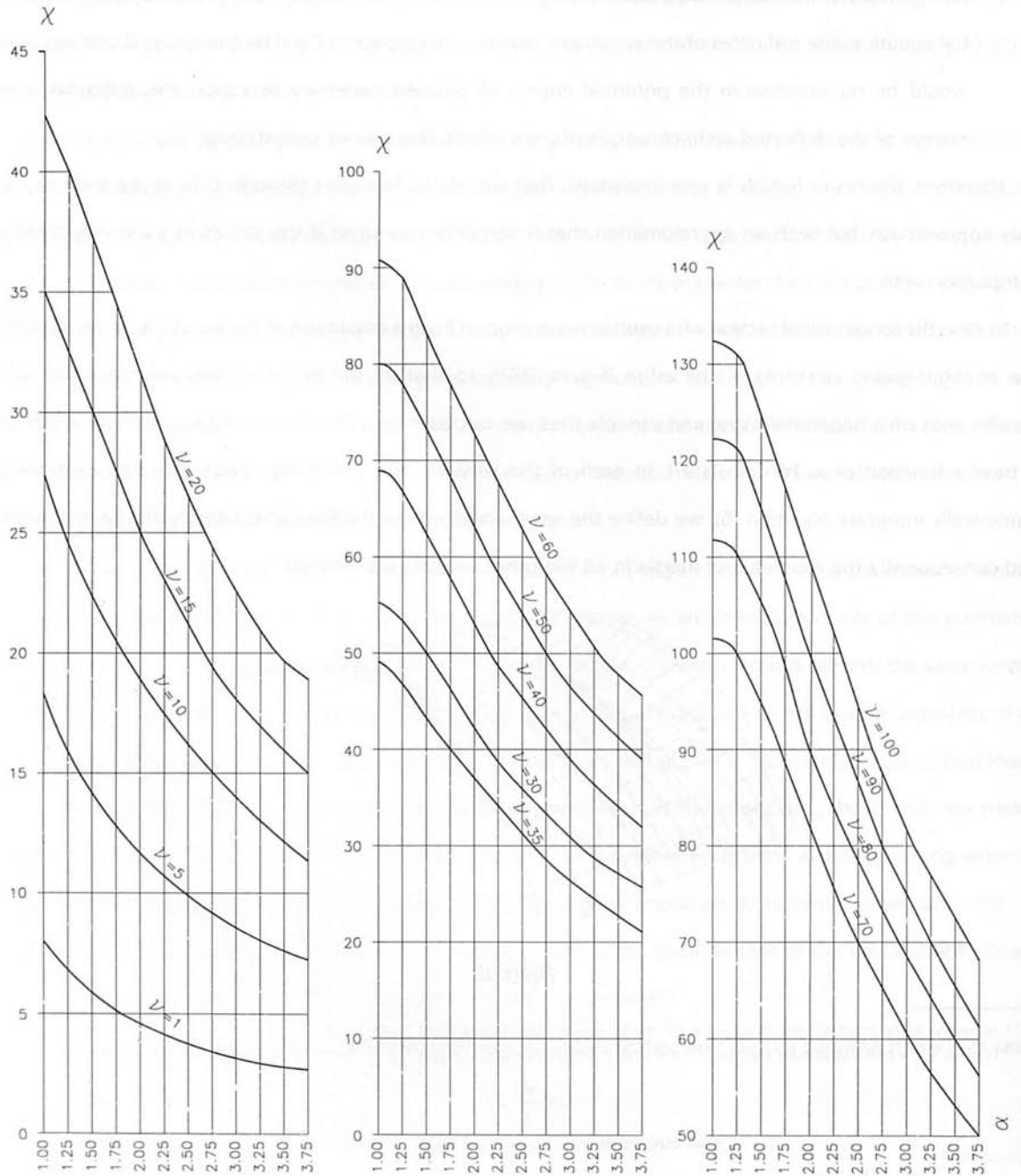
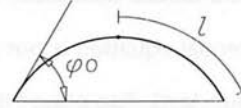


Figure 21

To make it easier to understand, we have made three assemblages of curves represented with different scales; one for ν between 1 and 20, another for ν between 30 and 50, and another between 60 and 100.

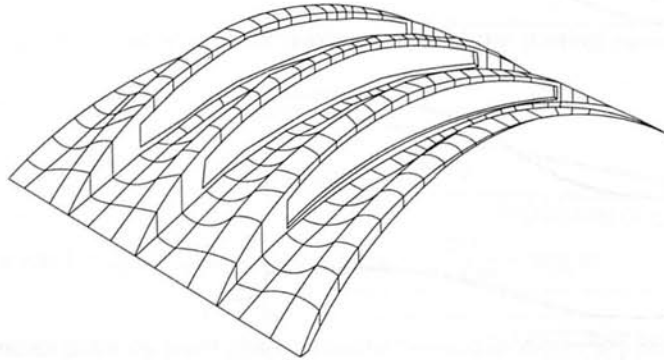


Figure 22

If the roof is designed with a discontinuous wave-shaped arch with skylights¹⁶ such as those shown in the initial illustrations and in Figure 22, there is a discontinuity where the skylights end and it is not possible, as it was in the previous case, to apply the system developed to study the elastic stability of the roof using differential equation (6) as a means of obtaining a series of curves from which we could obtain the value χ , which would give us the critical load. The reason that this is impossible is because the deflection configuration is not cylindrical and besides, the entity of the blind part that joins two successive arches can vary a great deal.

In Figure 23, we show a view of one of these structures and the longitudinal sections of the arch: through the keystone, 7, the generic line through the area of the skylight, to which 4, 5, and 6 are analogous, the generic line through the area in which the two arches are joined, to which the second and third and that of the first spring are analogous.

Theoretical calculation and experience show that the critical load can be calculated with a sufficiently close approximation (closer than that with which we learn the real value of E) supposing the constant section ($\nu = 1$) with the diagram of Figure 21, and using an average value of the moment of inertia $I_m = \sqrt[7]{I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_7}$.

In the previous case, with a variable section but "continuous undulation", it is obvious that the deflection equilibrium configuration will also be a cylinder whose cross section can be shown diagrammatically in Figure 14.

We have deliberately chosen seven divisions, the third of which falls near the discontinuity. To take it into account, we take the average of the two values of I , one to the left, the maximum of the discontinuity, and the other to the right, at the same distance as the maximum of the discontinuity of the point corresponding to the third division. The corresponding I_{average} is $22.15 \cdot 10^{-3}$

$$I_{\text{average}} = \sqrt[7]{I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_7} = \sqrt[7]{7 \cdot 18.5 \cdot 22.15 \cdot 28.3 \cdot 37.2 \cdot 42 \cdot 44.4 \cdot 10^{-3}} = 0.02471$$

¹⁶ See article mentioned above, "Forms".

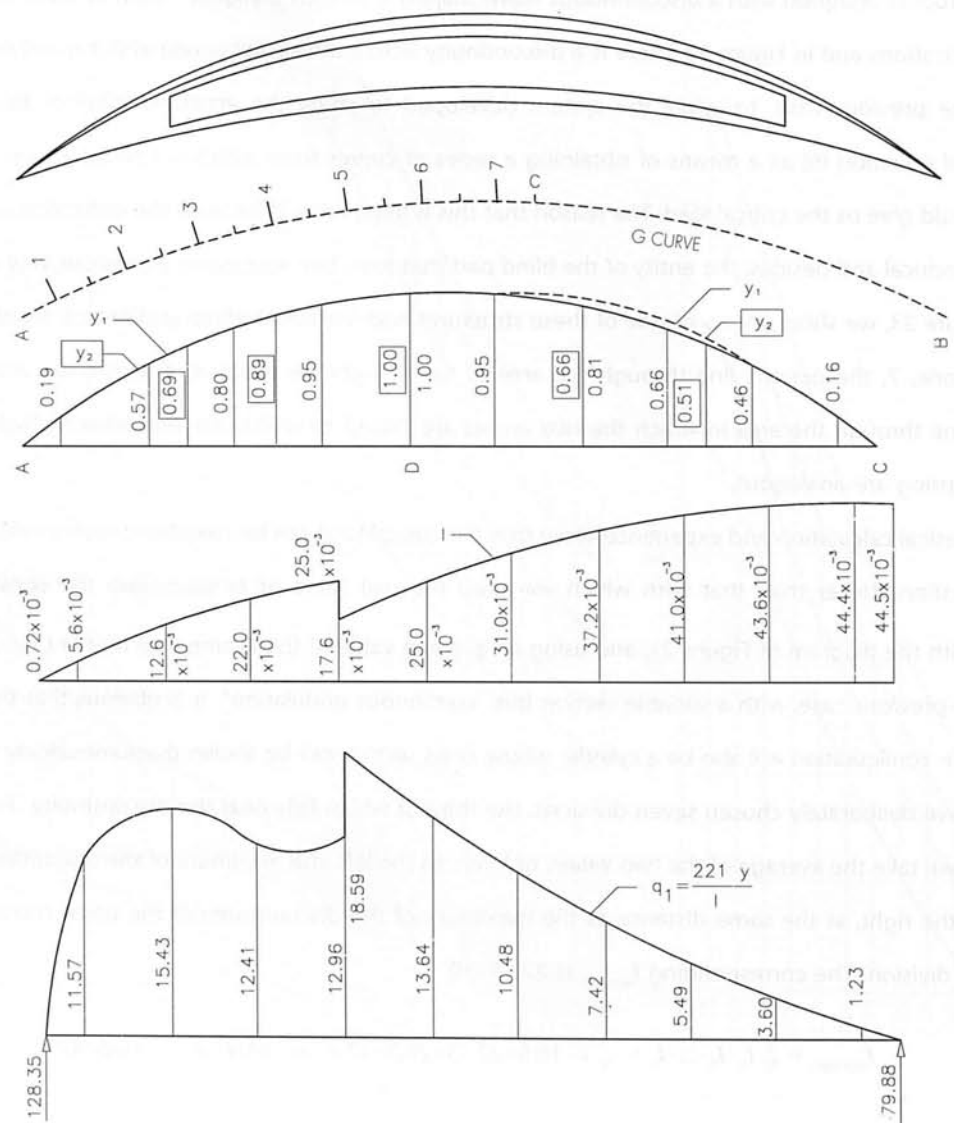
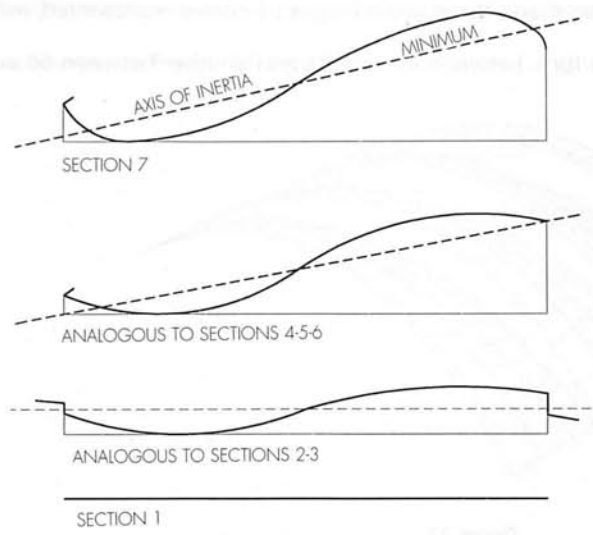


Figure 23

Therefore:

$$N_{\text{start}} = \frac{\pi^2 \cdot 10^5 \cdot 0.02471}{22.37^2} \simeq 341 \text{ T}$$

The maximum occurs at D , at the same point of maximum rise of the starting elastic line and has a value of $663.5 \cdot 10^3$. Therefore,

$$f = \frac{663.5 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^5} = 0.9478$$

Consequently, to have a rise l at D , we would need a force $= \frac{341}{0.9478} = 360 \text{ T}$.

Calculating the moments point by point gives an elastic line y_2 that practically coincides with y_1 . Therefore:

$N_{\text{critical}} = 360 \text{ T}$. The safety factor is $\simeq \frac{360}{46.85} = 7.7$, which is greater than necessary. Rigidity could be reduced

(in other words, the slopes and curvatures), which is economically more advantageous.

$$\text{T.m. units } l = 22.37$$

$$N_{\text{real}} \begin{cases} \text{spring } 50.24 \\ \text{spandrel } 46.20 \\ \text{keystone } 44.74 \end{cases}$$

$$N_{\text{average}} = 46.85$$

If the arch is discontinuous, the deflection configuration will no longer be cylindrical. We have constructed a hypothesis, however (which was shown to be correct by the experimental tests), that each section will deflect turning on its minimum inertia barymetric axis, the whole of it twisting as if it were a cylinder and with the moments of inertia obtained in that fashion.

This hypothesis supposes that the torsional stiffness of the vault will be negligible and has been repeatedly confirmed. The hypothesis has been used to calculate the strains at different points on the cross section, which contains the average rise of the vault (with which we eliminate all doubts concerning E) and these strains were later measured in reality. The ratio of these strains at two points coincides with what would be expected from the hypotheses, clearly approximate, that we have just described.

It is obvious that we do not claim that the approximate procedures that we have explained for this last case exhaust the theoretical problem; we only propose that the reader accompany us through a process which permits the solution of a very complex technical problem with the support of clear basic concepts.

To find if the procedure of using the average l is correct, the successive approximation method had to be used at the beginning.

Equation (6) can be written:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = - \left[q \sqrt{\rho_c^2 + x^2} + EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + x^2)^2} \right] \cdot y$$

which shows that arch AC can be considered an axially-compressed column with a variable load:

$$N_{\varphi} = q \cdot \sqrt{\rho_x^2 + x^2} + EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + x^2)^2}$$

whose extreme values are:

$$N_{\text{keystone}} = q \cdot \rho_c + \frac{EI}{\rho_c^2}$$

and

$$N_{\text{spring}} = q \cdot \sqrt{\rho_c^2 + \tau^2} + EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + \tau^2)^2}$$

The expression $EI \frac{\rho_c^2}{(\rho_c^2 + x^2)^2}$ is always negligible in concrete cases, in other words, with the values of I given in the structures for which the study of elastic stability is decisive.

Let us consider Figure 23, where we have indicated the distribution of the N_{φ} and of the moments of inertia along AC for the concrete case of an arch with a 43 m. span and a rise that is one-eighth of that span. As can be seen, N_{φ} varies little from A to C as always occurs in segmental arches for which deflection is decisive in the design.

It is important to note that the catenary will be funicular of the real loads only in the case of low undulations. If these undulations are large (which does not occur in practice) or if the wave-like vaults are discontinuous with steep slopes, it is obvious that, considering the edges of the arch where these steep slopes occur, the funicular of the loads is not a catenary, and, if we use the catenary as the directrix, we will have bending. In the actual cases we have dealt with, these flexures have been small, and the approximation that the catenary directrix was funicular of the loads could be made.

In Figure 23, the calculation process has been diagrammed:

1. Based on the geometry chosen, we can draw the diagram of the N_{φ} and that of the I for all the elements Δx of "column" AC . For ease of drawing, we have only given the extreme values and the intermediate value N_{φ} ; its average value, N , was taken from the diagram that we do not show.
2. We choose an elastic line to start from whose maximum rise, which we make equal to one, is displaced toward A , given the inertias near the spring.
3. We calculate the load line $\frac{N \cdot y}{I}$ and with it, the corresponding diagram of moments, whose maximum, divided by E , will be the maximum rise. The maximum rise does not necessarily have to coincide in value or in position with the one chosen.

The load correction process is the same as with the columns. As a result of the successive approximations (no more than two with a good choice of the initial value of N and of the starting curve) we obtain $N_{critical}$. In our case, because of a good choice of the starting curve, the coincidence of the position of maximum rise is exact.

If the safety factor were not acceptable, we will have to modify the geometry by increasing the rigidity of the vault to obtain a safety factor greater than 4. In the case of Figure 23, the value of the safety factor was greater than necessary, and it would be advisable to decrease the rigidity (in other words, the curvatures) for economic reasons.

With the means of numerical calculation available in this day and age, the diagrammatic-analytic method described can be done away with and we can determine in each case the numerical integration of equation (6) in which we substitute l for each element of those into which we divide the arch, for that which results from the previously-chosen geometry.

The solution of the problem posed using the successive approximation method is a good example of how very complex technical problems can be solved approximately if the basic concepts are clear.

SUPPORT CONDITIONS

We have supposed that a jointed vault on a support structure is the most appropriate in normal cases.

If the vault were recessed, the method explained could be applied with no difficulty as we have already shown in the case of the columns.

CONCURRENCE OF AXIAL LOADS AND BENDING IN ARCHES

We will first imagine an arch whose directrix is a funicular of its own weight or of the fixed loads, with a constant or variable section, with a symmetry with respect to C .

The flexures are due to the action of loads other than the fixed ones, loads which will produce not only by the moments but by the shear forces, modifying as well the direct load.

For roofs, the flexures are due to wind, snow, or the action, in some cases, of loads suspended from the roof (that can come, for example, from conveyor belts, electrical or compressed air conduits, etc.)

In all the cases in which we have had to intervene, the shear forces were small and the variation of the axial force was also small.

Although all our examples were based on the pure bending theory, with no shear forces, we know that they can be extended to the case of bending with shear forces in flexible pieces such as those that may have a risk of deflection.

Even in the case of bridge arches, the shear forces will not rule out the use of formulas and results obtained in the pure bending theory.

The simple expression of the calculation method recommended is justified because:

1. We give the vault enough cross section (constant or variable) so that the safety factor against deflection will be 4 or 5. In the case of vaults, this safety refers to the load per unit of expansion of the arch because the modifications of the axial load produced by accidental loads are small¹⁷.

When the calculations below are followed, stable structures are obtained under the conditions present on the Río de la Plata with the previously mentioned safety factor. In the case of bridges, a safety factor must be set taking into account total axial loads.

2. With the accidental loads, we calculate the moments we will call M_0 .
3. With the diagram of moments, we determine the corresponding elastic line with a generic ordinate y_0 .
4. Because of the deformations that this elastic line shows, new moments $N \cdot y_0$ will appear, with which the moments will become $M_1 = M_0 + N \cdot y_0$, which will produce in turn strains y_1 , with which the moments will become $M_2 = M_0 + N \cdot y_1$, which also produce deformations y_2 ... The generic ordinates y_0, y_1, y_2 ... form, if the vault or arch has been correctly sized, a converging series.
5. In the case of the vaults, and with the safety factor mentioned above, this convergence is rapid.
6. The arch or vault is sized with its final moments and the coaxial forces due to its own weight and the accidental loads.

ARCHES OR VAULTS THAT ARE NOT FUNICULAR OF THE LOADS

Obviously it is a good idea to make the directrix funicular for the fixed loads, which generally means its own weight. This may not be advisable in the case of bridge arches, in which we will try to obtain better final strains at a minimum cost.

In any event, any case in which the arch or vault that is not funicular of the loads is a form of the previously mentioned one. An arch or vault will always be equivalent to a load-funicular arch plus a system of bending moments, over which the accidental load moments must be superimposed. The calculation can be carried out according to the previous arguments.

¹⁷ A case in which significant variations in axial load can occur are those in which a very high-arched catenary directrix vault is used as a grain or fertilizer silo. In these cases, however, the problem is not deflection (the axial forces due to its own weight are small and the sections required by the bending are very significant), but rather the bending.

Therefore, the previous developments are not useful here; sizing the structure to resist bending removes all risk of deflection.

FINAL OBSERVATION

The conceptual considerations upon which this paper is based and the methods proposed constitute at least the basis for a general approach to deflection problems not specifically discussed in the books I am familiar with on the topic.

Given the great analytic complexity that these problems have, the mature way of dealing with the cases not specifically developed in this paper, and whose solution we have only outlined, would be the following:

1. Check with the diagrammatic methods, in each case, the viability of a possible form as a solution for a specific type of problems.
2. Once assured of the viability of this solution, study the programmes to solve the problem by computation.



9 788480 951388

Eladio Dieste
1943-1996
MÉTODOS DE CÁLCULO • CALCULATION METHODS

